

Una aplicación de los modelos BVAR estacionales

Enrique M. Quilis¹

Instituto Nacional de Estadística
C/ Rosario Pino, 14-16
Edificio Torre Rioja - Planta 15 - Despacho 15.34
28046 Madrid (España)
emquilis@ine.es

¹ Agradezco las conversaciones mantenidas con Ana Abad, Carolina Arias, Antoni Espasa, Rafael Frutos, Francisco Melis y Daniel Peña sobre modelización multivariante de series temporales así como los comentarios de participantes en seminarios celebrados en el Instituto Nacional de Estadística y en las Universidades Carlos III, Autónoma de Madrid y de Extremadura. Las opiniones expresadas corresponden al autor y no reflejan necesariamente las del INE.

RESUMEN

En este artículo se considera un tipo de modelos BVAR (Vectores de Autorregresiones Bayesianas) especialmente diseñado para representar series temporales múltiples de carácter estacional, detallando las etapas de especificación de la información *a priori*, calibrado y estimación. Esta metodología es aplicada a las series mensuales de viviendas vendidas e iniciadas de los EE.UU. estudiadas por diversos autores. Se examina el mecanismo de propagación de los impulsos mediante el análisis estructural y se realiza un análisis canónico para identificar las transformaciones lineales de los datos más apropiadas, con el fin de descubrir estructuras subyacentes y detectar relaciones de cointegración. Se discute la relación entre los modelos estacionales BVAR y VARMA, tanto desde un punto de vista teórico como empírico. El trabajo incluye una evaluación del rendimiento predictivo del modelo.

Palabras clave: Modelos VAR, BVAR y VARMA, calibrado, estacionalidad, análisis canónico, cointegración, análisis estructural, predicción.

Códigos JEL: C11, C32, C51, C53.

ABSTRACT

In this paper I consider a type of Bayesian Vector of Autoregressions (BVAR) specially designed to represent multiple seasonal time series. The stages of prior specification, calibration and estimation are emphasized. This methodology is applied to the monthly time series of U.S. housing sales and housing starts studied by several authors. I examine the impulse-propagation mechanism of the system by means of structural analysis and I use canonical analysis to identify meaningful linear transformations of the data, in order to discover underlying structures and to detect cointegration relationships. The linkage between seasonal BVAR and seasonal VARMA models is discussed from a theoretical point of view as well as from an empirical point of view. The text includes an evaluation of the forecasting performance of the model.

Keywords: VAR, BVAR, and VARMA Models, Calibration, Seasonality, Canonical Analysis, Structural Analysis, Forecasting.

JEL Codes: C11, C32, C51, C53.

1. INTRODUCCION

Un elevado número de series económicas mensuales o trimestrales poseen una pauta de variabilidad estacional que forma parte de sus características permanentes o estructurales. Este comportamiento obedece a múltiples causas (Granger, 1978; Hylleberg, 1994) y varía considerablemente de unas series a otras en lo que concierne a su estabilidad, intensidad y secuencia temporal pero, en cualquier caso, son un elemento a tener en cuenta en cualquier tarea que involucre el uso de dichas series.

El tratamiento de la estacionalidad a nivel univariante no plantea problemas especiales, tanto si se desea considerarla como si se quiere suprimirla. En el primer caso, los modelos ARIMA (*Autoregressive Integrated and Moving Average*) difundidos por Box y Jenkins (1970) permiten incorporar el fenómeno estacional de manera relativamente simple. De esta manera, la predicción y análisis de estas series no plantea problemas especiales. En el segundo caso, se ha alcanzado un considerable grado de perfeccionamiento en los procedimientos de extracción de señales, en general, y de desestacionalización, en particular, de manera que la eliminación del componente estacional puede llevarse a cabo en la actualidad de manera fiable, rápida y disponiendo de una amplia gama de diagnósticos y medidas de control. De esta manera, se pueden construir series especialmente útiles para cuantificación del ritmo de avance a corto plazo (análisis de la coyuntura) o de la magnitud de las desviaciones respecto a la tendencia secular (estudio del ciclo económico)².

Desde el punto de vista multivariante el panorama es menos halagüeño. Por su naturaleza intrínseca, la estacionalidad amplía de forma notable las posibilidades de interacción dinámica, lo que da como resultado un incremento sustancial del tamaño de los modelos y, por consiguiente, un agravamiento de los problemas de sobreparametrización que aquejan de forma endémica a esta clase de modelos.

Por todo ello, la práctica habitual consiste en eliminar de una forma u otra el fenómeno estacional y realizar acto seguido el análisis multivariante como si éste nunca hubiera estado presente. Existen tres formas principales de realizar este procesamiento preliminar:

- diferenciando estacionalmente,
- efectuando un ajuste estacional preliminar,
- incorporando variables ficticias estacionales.

La diferenciación sistemática no es aconsejable (Hillmer y Tiao, 1979, Box y Tiao, 1977) porque complica la identificación y la estimación al introducir elementos no invertibles. Asimismo, elimina información potencialmente relevante como, por ejemplo, factores comunes y relaciones de cointegración.

² En este caso se necesitan algunas operaciones de filtrado adicionales, véase Bógalo y Quilis (2003) y las referencias ahí citadas.

El segundo procedimiento es bastante habitual en el análisis aplicado debido a su sencillez, a la disponibilidad de procedimientos bastante fiables de extracción de señales y a que es consistente con gran parte del análisis económico cuantitativo, centrado en el uso de señales carentes de estacionalidad, tales como las series desestacionalizadas o las de ciclo-tendencia. No obstante, esta práctica puede tener efectos adversos sobre la especificación dinámica (Wallis, 1974; Sims, 1974) y está sujeta a serios problemas de estimación vinculados con la falta de invertibilidad que inducen los filtros desestacionalizadores. En particular, el filtrado requerido para desestacionalizar puede distorsionar las relaciones dinámicas entre las series, dificultar la detección de raíces unitarias y complicar la modelización multivariante, sobre todo de tipo VAR, véase Maravall (1993), Harvey y Scott (1994) y Ghysels y Perron (1993).

El uso de variables ficticias de tipo estacional trata de controlar de forma explícita el efecto que la estacionalidad tiene sobre el nivel de la serie. Este procedimiento no incurre en los problemas antes comentados pero asume que el componente estacional de las series objeto de análisis evoluciona de manera determinista, hipótesis por lo general demasiado estricta. Por otra parte, este procedimiento excluye la posibilidad de tener en cuenta de forma explícita las interacciones dinámicas entre las series de naturaleza específicamente estacional.

Adicionalmente, como indica Todd (1990) los elementos estacionales son parte de la respuesta de agentes optimizadores frente a cambios en su entorno económico, por lo que parece relevante analizar las series simultáneamente incluyendo sus respectivos componentes estacionales. Argumentos adicionales se encuentran en Osborn (1988).

Por otra parte, diversos autores señalan la posible interacción entre los elementos cíclicos y estacionales en el sentido de que series con intensos patrones estacionales tienden a ser también bastante sensibles a las condiciones cíclicas, evidenciando que la capacidad para variar periódicamente a corto plazo (estacionalidad) puede estar relacionada con la capacidad para variar a medio plazo frente a *shocks* transitorios en la tendencia. Según este enfoque, la estacionalidad es un elemento importante para una mejor comprensión del ciclo económico, véase Barsky y Miron (1989).

Tanto los inconvenientes de los métodos de preprocesamiento estacional antes expuestos como el posible interés intrínseco de este fenómeno aconsejan el uso de modelos que permitan su incorporación de forma explícita, pero que no se vean desbordados por los problemas de sobreparametrización y las dificultades de especificación. En este sentido, la primera alternativa consiste en extender el marco VAR (*Vector Autoregression*) al caso estacional mediante el uso de elementos bayesianos orientados, esencialmente, a mitigar los efectos adversos de la sobreparametrización. En esta dirección se encuadran las propuestas de Canova (1992, 1993) y Raynauld y Simonato (1993).

Otra posibilidad se basa en la utilización de modelos VARMA (*Vector Autoregressive and Moving Average*) estacionales. Estos modelos son una

extensión relativamente inmediata de los modelos ARIMA univariantes. Por razones de espacio, en este trabajo sólo se considera la primera alternativa, encontrándose en Tiao (2001) una revisión panorámica de este enfoque y en Quilis (2004b) una aplicación a las mismas series que se examinan en este trabajo.

La estructura del trabajo es la siguiente. En la segunda sección se presentan los modelos BVAR, prestando especial atención a las restricciones bayesianas especialmente diseñadas para tener en cuenta el fenómeno estacional. Se detallan los procedimientos de estimación y calibrado. En el tercer apartado se expone la relación entre los modelos BVAR y los VARMA desde una perspectiva teórica. La sección cuarta examina, univariadamente, las series mensuales de viviendas iniciadas y terminadas de los Estados Unidos. Un análisis exploratorio bivariante se realiza en la quinta sección y, en la sexta, se aplica la metodología BVAR estacional a las mismas. Siguiendo a Sims (1980) se realiza un análisis estructural del modelo con el fin de examinar el mecanismo de propagación del sistema y, en línea con Tiao *et al.* (1993), se aplica el análisis canónico para identificar transformaciones lineales de las series originales que revelen mecanismos subyacentes, faciliten la interpretación del modelo e identifiquen posibles factores comunes y relaciones de cointegración. Finalmente, se examina el rendimiento predictivo del modelo. En la séptima sección se analiza, desde un punto de vista empírico, la relación entre los modelos BVAR y los VARMA. El trabajo termina con un apartado de conclusiones.

2. MODELOS BVAR ESTACIONALES

Sea $Z_t = (z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{kt})'$ un vector de observaciones efectuadas sobre k variables en el período t , con $t=1..n$. Se considera que Z_t evoluciona según un modelo vectorial autorregresivo (VAR) de orden p , siendo p un múltiplo del número s de observaciones por período anual ($p=\tau s$, $\tau \geq 1$), si puede ser expresado de la siguiente forma:

$$[2.1] \quad Z_t = \mu + \Phi_1 Z_{t-1} + \Phi_2 Z_{t-2} + \dots + \Phi_p Z_{t-p} + U_t$$

donde μ es un vector de k constantes y Φ_h , $h=1..p$, son matrices de dimensión $k \times k$. El término U_t representa una secuencia vectorial de perturbaciones estocásticas de esperanza nula, serialmente incorrelacionadas y con matriz de varianzas y covarianzas constante. Se asume que la función de distribución de probabilidades que genera a U_t es normal multivariante:

$$[2.2] \quad U_t : k \times 1 \sim N(0, \Sigma)$$

En general, se admite que Σ no es una matriz diagonal, es decir, que existen interacciones contemporáneas entre las k innovaciones. Los modelos VAR son estructuras muy generales y, dependiendo de la naturaleza de las matrices Φ_h y Σ , aparecen diversos casos particulares. Véase Tiao *et al.* (1979), Sargent (1979), Sims (1980, 1986a, 1993), Tiao y Box (1981), Liu (1986), Lütkepohl (1991), Reinsel (1993), Espasa y Cancelo

(1993), Enders (1995) y Tiao (2001), para una exposición detallada de estos modelos. Un tratamiento específico de la determinación del orden p del modelo se encuentra en Choi (1992) y Deniau *et al.* (1992).

Por otra parte, como precio a pagar por esa generalidad, estos modelos son representaciones poco parsimoniosas de la estructura dinámica de un vector de series temporales de forma que, incluso en sistemas de dimensión moderada, el número de parámetros que han de ser estimados es muy elevado, agotando eventualmente los grados de libertad de los estimadores. Este hecho, acompañado por la elevada correlación que suelen presentar los regresores de un VAR, da lugar a dos consecuencias funestas: multicolinealidad y sobreajuste. El efecto combinado de ambas es un deterioro de la capacidad predictiva, estimaciones inciertas y una menor utilidad como herramienta analítica.

Con el fin de resolver estos problemas, se han propuesto diversas soluciones en línea con los métodos de regresión cresta y de estimación mixta de Theil-Goldberger, véase Judge *et al.* (1980). Así, Litterman (1984, 1986), Doan *et al.* (1984) y Todd (1984, 1988) proponen imponer una serie de restricciones de naturaleza probabilística orientadas a mejorar la calidad de la estimación y de las predicciones. Estas restricciones, susceptibles de una interpretación bayesiana, no reflejan principios derivados de la teoría económica (usualmente controvertidos) sino consideraciones instrumentales, ateóricas, asociadas con nociones de tipo puramente estadístico. Debido a su origen, este tipo de información extramuestral se denomina 'prior de Minnesota' o 'prior de Litterman'.

Resulta posible extender este marco bayesiano para acomodar la presencia del fenómeno estacional. En esta dirección se encuadran las propuestas de Canova (1992, 1993) y Raynauld y Simonato (1993). A continuación se expone el enfoque de estos últimos, para lo que resulta conveniente modificar la notación empleada en [2.1]. La ecuación i -ésima de un modelo VAR(p) es:

$$[2.3] \quad Z_i = \begin{pmatrix} i_{n-p} & Z_{1(l)} & \cdots & Z_{k(l)} & \cdots & Z_{1(p)} & \cdots & Z_{k(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_i \\ \phi_{i,1,1} \\ \vdots \\ \phi_{i,k,1} \\ \vdots \\ \phi_{i,1,p} \\ \vdots \\ \phi_{i,k,p} \end{pmatrix} + U_i = x\beta_i + U_i$$

siendo $Z_{j(h)}$ el vector de $(n-p)$ observaciones de la serie j retardada h períodos. Nótese que el vector de regresores x es el mismo en todas las ecuaciones, por lo que la consideración simultánea de las k ecuaciones que integran el VAR da lugar a la siguiente expresión:

$$[2.4] \quad Z = (I_k \otimes x)\beta + U = X\beta + U$$

siendo \otimes el producto tensorial. Naturalmente, el vector β está relacionado con las matrices Φ según:

$$[2.5] \quad \beta = \text{vec}(\Phi') \quad \text{con} \quad \Phi = (\mu \quad \Phi_1 \quad \dots \quad \Phi_p)$$

En consecuencia, la matriz de varianzas y covarianzas de U es:

$$[2.6] \quad \Sigma_U = \Sigma \otimes I_{n-p} \quad \text{con} \quad \Sigma = \{\sigma_{i,j} \quad i, j = 1..k\}$$

El modelo [2.4] tiene un aspecto similar al del modelo lineal del análisis de regresión, con las debidas consideraciones respecto a la dimensión y estructura de los regresores.

La especificación bayesiana de un modelo VAR considera que los parámetros que forman el vector β son variables aleatorias caracterizadas por una distribución de probabilidad normal multivariante:

$$[2.7] \quad \beta \sim N(\beta^*, V_\beta)$$

En particular, los principios básicos que articulan al prior de Litterman son:

- la dinámica propia es más importante que la cruzada,
- la influencia disminuye a medida que aumenta la distancia temporal,
- las series individuales no son estacionarias y
- no existe cointegración.

Naturalmente, el enfoque de Litterman no agota todas las posibilidades. Otros planteamientos de la información *a priori* se describen en Ingram y Whiteman (1992), Sims y Zha (1996), Zha (1998), Robertson y Tallman (1999) y del Negro y Schorfheid (2003a, 2003b).

La propuesta de Raynauld y Simonato consiste en generalizar el prior de Litterman de manera que el modelo subyacente sea un paseo aleatorio con raíces unitarias estacionales y deriva³:

$$[2.8a] \quad (1 - B)(1 - B^s)z_{i,t} = \mu_i + u_{it} \quad \forall i$$

$$[2.8b] \quad (1 - B^s)z_{i,t} = (1 - B)(1 + B + \dots + B^{l-1})z_{i,t} = \mu_i + u_{it} \quad \forall i$$

En consecuencia, la media del prior sobre los parámetros del modelo VAR(p) viene dada por:

³ Estos autores también consideran la posibilidad de ampliar el prior de Litterman mediante el uso de variables ficticias estacionales.

$$[2.9] \quad \beta^* = \begin{cases} \mu_i = 0 & \forall i \\ \phi_{i,j,h} = \begin{cases} 1 & i = j \quad h = 1, s \\ -1 & i = j \quad h = s + 1 \\ 0 & i \neq j \quad h \neq 1, s, s + 1 \end{cases} \end{cases}$$

La matriz de varianzas y covarianzas de β se asume diagonal, y está gobernada por un vector π de m hiperparámetros que describe de forma parsimoniosa las propiedades de dicha matriz.

$$[2.10] \quad \text{diagonal}(V_\beta) = \begin{cases} v(\mu_i) = \infty & \forall i \\ v(\phi_{i,j,h}) = (\pi_1 F_{i,j} st_h sd_h (\sigma_{ii} / \sigma_{jj}))^2 & \forall i, j \quad \forall h \end{cases}$$

En primer lugar, se asume un prior difuso para las constantes del modelo, de manera que su estimación estará determinada exclusivamente por la información muestral. En segundo lugar, los restantes parámetros del sistema son considerados como variables aleatorias independientes entre sí (de ahí el carácter diagonal de V_β) cuyas varianzas están controladas por un reducido vector de hiperparámetros, que actúa sobre tres dimensiones esenciales de un modelo VAR: dinámica propia de primer orden tanto regular como estacional (π_1), dinámica general (g_h) y dinámica cruzada ($F_{i,j}$).

El hiperparámetro π_1 , con $0 \leq \pi_1 < \infty$, mide el grado de confianza que el analista tiene en el prior sobre la media. Así, si $\pi_1 \rightarrow 0$ considerará que los parámetros asociados al primer retardo propio, tanto regular como estacional, son muy próximos a la unidad y, por el contrario, si $\pi_1 \rightarrow \infty$ adoptará un prior difuso sobre dichos parámetros, dando como resultado que su determinación se haga sólo en función de la información muestral. Asimismo, este hiperparámetro refleja la incertidumbre global que el analista tiene sobre la proximidad del modelo al prior expresado en [2.8], esto es, π_1 también cuantifica el grado de incertidumbre global: si $\pi_1 \rightarrow 0$ el sistema se considera muy similar a k paseos aleatorios estacionales con deriva, posiblemente correlacionados de forma contemporánea y, si $\pi_1 \rightarrow \infty$, será afín a un modelo VAR no restringido.

La matriz F específica, desde un punto de vista extramuestral, la interacción dinámica entre las series del modelo. En el caso del prior de Litterman se asume una estructura simétrica de la forma:

$$[2.11] \quad F_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ \pi_2 & i \neq j \end{cases}$$

Así, el hiperparámetro π_2 cuantifica el grado de asociación temporal entre las variables del sistema. Usualmente, se suele acotar adicionalmente π_2 para que sea inferior a la unidad, de forma que no se otorga más importancia a la dinámica cruzada que a la propia en la determinación de V_β : $0 \leq \pi_2 \leq 1$. Si $\pi_2 \rightarrow 0$ el sistema carecerá de interacción dinámica entre las k

variables que lo integran. Por el contrario, si $\pi_2 \rightarrow 1$ no se asumirá hipótesis alguna acerca de estas interacciones, dejando que sea la información muestral la que determine su naturaleza. Por supuesto, este esquema se puede generalizar tanto como se desee de manera que se pueden considerar bloques de variables, asimetrías, etc. Esta generalización implica una menor simplicidad en el modelo al aumentar el número de hiperparámetros.

Las funciones st_h y sd_h cuantifican el grado de reducción de la varianza en función del retardo, siendo a su vez dependientes de dos hiperparámetros: π_3 y π_4 . La primera función modula el decaimiento en los retardos interestacionales:

$$[2.12] \quad st_h = \begin{cases} h^{-\pi_3} & h = 1..s-1 \\ (h-(s-1))^{-\pi_3} & h = s..2s-1 \\ (h-(2s-1))^{-\pi_3} & h = 2s..3s-1 \\ etc. \end{cases}$$

El hiperparámetro π_3 ($0 \leq \pi_3 < \infty$) controla el ritmo de decaimiento fuera de los retardos estacionales, de manera que cuanto mayor es, más rápidamente tiende a ceñirse la varianza del parámetro correspondiente a cero. Con el fin de limitar la interacción de esta función con el resto de los elementos que definen el prior sobre las varianzas, se introduce la segunda función:

$$[2.13] \quad sd_h = \pi_4^{d_h-1}$$

donde:

$$[2.14] \quad d_h = \begin{cases} 1 & h = 1..s \\ 2 & h = s+1..2s \\ 3 & h = 2s+1..3s \\ etc. \end{cases}$$

Si se utiliza el prior [2.8a] se impone adicionalmente la condición $st_{s+1} = sd_{s+1} = 1$. La interacción de ambas funciones permite considerar muchas situaciones en lo que concierne a la dinámica tanto regular como estacional, véase Quilis (2002) para un análisis detallado de estas funciones.

El hiperparámetro π_4 ($0 \leq \pi_4 \leq 1$) controla el ritmo de decaimiento entre los retardos estacionales, de manera que cuanto menor es, más deprisa tiende a ajustarse la varianza del parámetro correspondiente hacia cero. Esta función tiene un aspecto escalonado, manteniendo constante el grado de reducción de la varianza dentro de cada tramo anual.

Una vez especificado el prior $\beta \sim N(\beta^*, V_\beta)$, la estimación se realiza aplicando el método de Theil-Goldberger, obteniéndose:

$$[2.15] \quad \hat{\beta} = ((\Sigma^{-1} \otimes (x'x)) + V_{\beta}^{-1})^{-1} ((\Sigma^{-1} \otimes x')Z + V_{\beta}^{-1}\beta^*)$$

La correspondiente matriz de varianzas y covarianzas de $\hat{\beta}$ es:

$$[2.16] \quad V_{\hat{\beta}} = ((\Sigma^{-1} \otimes (x'x)) + V_{\beta}^{-1})^{-1}$$

La evaluación de [2.15] y [2.16] requiere el conocimiento previo de Σ . Usualmente, ésta se determina a partir de la matriz de varianzas y covarianzas de los residuos de k modelos AR(p) univariantes o de los de un VAR(p) no restringido.

Estas dos ecuaciones describen la distribución *a posteriori* de $\hat{\beta}$ en un contexto gaussiano con un prior normal multivariante, de forma que el estimador mixto es una media ponderada del estimador VAR y del prior, dependiendo las ponderaciones de las respectivas matrices de varianzas y covarianzas.

Debe resaltarse que el estimador [2.15] es válido tanto en el caso en que se imponen restricciones simétricas como en el que no lo son. En el primero, siguiendo el álgebra SURE (*Seemingly Unrelated Regression Equations*), equivale a la estimación por mínimos cuadrados ordinarios (MCO) ecuación por ecuación y, en el segundo, se trata de una estimación sistémica simultánea, véase Judge *et al.* (1980).

Antes de realizar la estimación del modelo BVAR, hay que proceder a la determinación del vector de hiperparámetros π en función de algún criterio estadístico relacionado con el uso que se pretenda hacer del modelo. Este proceso se denomina 'calibrado' y es especialmente importante para determinadas aplicaciones de los BVAR como, por ejemplo, el análisis de cointegración (Álvarez y Ballabriga, 1994) o la detección de las estructuras de rango reducido que conducen a los modelos índice o VAR de rango reducido (Reinsel, 1983).

El calibrado puede realizarse mediante consideraciones exclusivamente *a priori* o bien haciendo uso de la información muestral, basándose en la optimización de una cierta función objetivo $\varphi(\beta(\pi))$. Naturalmente, ambas opciones son complementarias, ya que tanto las características estadísticas de los datos como los elementos teóricos pueden condicionar la selección particular de π . Un criterio, propuesto por Doan *et al.* (1984), consiste en seleccionar el vector de hiperparámetros que minimiza el logaritmo del determinante de la matriz de varianzas y covarianzas de los errores de predicción con horizonte H . Asimismo, también pueden considerarse la traza de dicha matriz, el estadístico U de Theil, etc.

Si el vector π es de dimensión reducida, es posible realizar un mado completo de dicho vector y evaluar $\varphi(\beta(\pi))$ en todos los puntos. El valor de π que optimice dicha función determinará los hiperparámetros. Naturalmente, con valores moderados o elevados de m este procedimiento no es razonable ni conveniente, por lo que se han propuesto distintos métodos de calibrado.

Así, Todd (1988) examina el procedimiento de búsqueda axial, consistente en aplicar el siguiente algoritmo⁴:

1. Calibrado inicial: $\pi_0 = (\pi_{i,0} \ i=1..m)$.
2. Fijados todos los elementos de π menos uno (π_j) variar sólo éste y evaluar la función objetivo en un rango prefijado ($\pi_{j,0} - \alpha_j, \pi_{j,0} + \alpha_j$) con incrementos dados $\Delta\pi$.
3. Se selecciona el valor de π_j que optimiza $\varphi(\beta(\pi))$: $\pi_{j,1}$.
4. Fijado π_j se selecciona el siguiente hiperparámetro π_{j+1} y se repiten los pasos 2 y 3 hasta satisfacer un criterio de convergencia predeterminado.

Si las curvas iso- $\varphi(\bullet)$ son relativamente ortogonales en el espacio π , el procedimiento de búsqueda axial proporcionará buenos resultados de forma rápida. Por el contrario, si dichas curvas son elípticas o adoptan formas irregulares, el procedimiento podrá verse atrapado en un óptimo local o su convergencia podrá ser muy lenta. Con el fin de asegurar la globalidad del máximo, se recomienda repetir varias veces el algoritmo variando el calibrado inicial π_0 o determinando éste a partir de una optimización preliminar sobre una rejilla de paso grueso que abarque un dominio amplio.

3. RELACION ENTRE LOS MODELOS BVAR Y VARMA: ASPECTOS TEÓRICOS

Los modelos VARMA constituyen una forma alternativa de restringir la tendencia sobreparametrizadora de los VAR. En lugar de imponer restricciones bayesianas mediante un vector de hiperparámetros sobre la estructura VAR, los modelos VARMA expanden el espacio de medida incorporando las innovaciones de períodos anteriores. Para ilustrar esta equivalencia se considera el caso $p=q=1$, $P=Q=0$ y $\mu=0$:

$$[3.1] \quad Z_t = \Phi Z_{t-1} + U_t - \Theta U_{t-1}$$

La inclusión de los términos VMA equivale funcionalmente a la imposición de una serie de restricciones no lineales sobre una representación VAR(p). En efecto, asumiendo invertibilidad, la representación VAR(∞) puede ser truncada para un p suficientemente elevado:

$$[3.2] \quad Z_t = \Pi_1 Z_{t-1} + \Pi_2 Z_{t-2} + \dots + \Pi_p Z_{t-p} + U_t$$

Las matrices Π_h satisfacen la siguiente relación:

$$[3.3] \quad \Pi_h = \Theta^h (\Phi - \Theta) \quad h = 1..p$$

De manera aproximada, se puede establecer una equivalencia funcional entre los elementos de la matriz Θ y el vector π de hiperparámetros de un BVAR:

⁴ Un procedimiento alternativo se describe en Sims (1986b).

- la incertidumbre global (π_1) está representada de forma conjunta en la matriz Θ , sobre todo al realizar la operación $(\Phi - \Theta)$,
- los elementos situados fuera de la diagonal principal de Θ condicionan la dinámica cruzada, teniendo un papel similar al de la matriz F . De esta manera se pueden considerar bloques de variables, asimetrías, etc.
- los elementos diagonales Θ_{ii} restringen, de forma individualizada, la dinámica propia de cada variable de manera que su función es análoga a la del hiperparámetro π_3 de un esquema de decaimiento geométrico.

De esta manera, se aprecia cómo un modelo VARMA(1,1) equivale a un VAR de elevado orden sujeto a restricciones no lineales. En consecuencia, los elementos que componen Θ actúan a modo de hiperparámetros, si bien su determinación numérica se realiza al mismo tiempo que los parámetros contenidos en Φ , mediante la maximización de la función de verosimilitud exacta y no, como en el caso BVAR, de forma separada a través del proceso de calibrado. No obstante, si un modelo BVAR es calibrado atendiendo también a criterios de máxima verosimilitud, la semejanza con un VARMA deberá ser elevada, al menos en lo que concierne a sus propiedades sistémicas.

Esta semejanza aumenta con los modelos estacionales multiplicativos, ya que éstos introducen de forma automática una serie de restricciones (de exclusión) que anulan las matrices de parámetros intermedias de la representación aditiva implicada.

4. ESTUDIO DE UN CASO⁵. ANALISIS UNIVARIANTE

En esta sección se aplica la metodología BVAR estacional a las series mensuales de viviendas unifamiliares iniciadas (*Hstarts*) y vendidas (*Hsold*) en los Estados Unidos durante el periodo 1965:01 a 1975:12. Las últimas siete observaciones sólo serán consideradas para un análisis extramuestral de la capacidad predictiva del modelo.

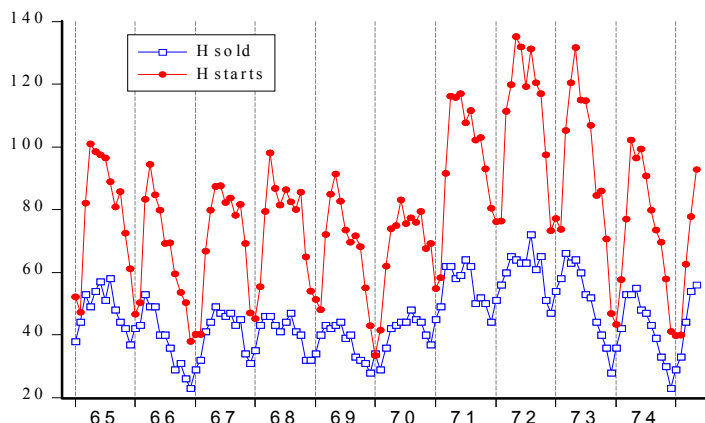
Estas series se han obtenido de Liu y Hudak (1995), son compiladas por el *US Bureau of the Census* y forman parte de los principales indicadores de análisis coyuntural de dicho país. En particular, *Hstarts* es considerada como un indicador adelantado debido a su carácter prospectivo, a su sensibilidad cíclica y a su dependencia de las condiciones monetarias (tipos de interés) y financieras (condiciones crediticias, grado de racionamiento cuantitativo)⁶. Su reducido desfase de publicación con respecto al mes de referencia (en torno a 15 días) es un factor que contribuye a su elevada utilización. Más información sobre estas series se encuentra en la página de Internet <http://www.census.gov>.

⁵ Las estimaciones ARIMA univariantes así como la extracción de señales, se han realizado mediante los programas TRAMO y SEATS (Gómez y Maravall, 1996). La aplicación de la metodología BVAR estacional se ha llevado a cabo mediante una librería específica desarrollada en Matlab (Quilis, 2004a). Finalmente, los modelos VARMA se han estimado con el programa SCA (Liu y Hudak, 1995).

⁶ Véase *The Conference Board* (2004).

Estas series se han seleccionado por razones comparativas, al haber sido ya analizadas desde una perspectiva multivariante por otros autores, véase Hillmer y Tiao (1979), Liu y Hudak (1995) y Tiao (2001). A continuación se muestra su representación gráfica:

Gráfico 4.1: Niveles



Se aprecia un intenso patrón estacional en ambas series, sobre todo en *Hstarts*, así como una evolución tendencial poco estable, sin una evolución a largo plazo claramente discernible.

Los modelos ARIMA univariantes para ambas series son del tipo 'líneas aéreas' $ARIMA(0,1,1) \times (0,1,1)_{12}$:

$$[4.1] \quad (1-B)(1-B^{12})z_t = (1-\theta_1 B)(1-\theta_{12} B^{12})a_t$$

La estimación, por máxima verosimilitud exacta, arroja los siguientes resultados:

**Tabla 4.1: Modelos ARIMA
Estimación por máxima verosimilitud exacta**

		Estimación	Desviación típica	Q(12)	Q(24)
θ_1	Hsold	0.16	0.09	5.27	23.22
	Hstarts	0.20	0.09	6.11	12.6
θ_{12}	Hsold	0.87	0.21		
	Hstarts	0.85	0.14		
σ_a^2	Hsold	12.96	-		
	Hstarts	36.97	-		

La presencia de los operadores $(1-B)$ y $(1-B^{12})$ indica la existencia de dos componentes no estacionarios⁷, uno vinculado con la tendencia, $(1-B)^2$, y otro con la estacionalidad, $U(B)$. Por otra parte, los reducidos valores de θ_1 confirman el carácter volátil de la tendencia de ambas series. Por el contrario, los valores próximos a la zona de no invertibilidad de los parámetros θ_{12} corroboran la naturaleza estable, cuasi-determinista, de la

⁷ Recuérdese que $(1-B^{12}) = (1-B)(1+B+\dots+B^{11}) = (1-B)U(B)$.

estacionalidad. Finalmente, la diferencia entre las varianzas de las innovaciones de cada serie explica, en buena medida, la disparidad de sus volatilidades.

No se han detectado observaciones atípicas pero sí efectos de calendario: uno, vinculado con la Pascua, en *Hsold* y otro, asociado al ciclo semanal, en *Hstarts*. La estimación mostrada en la tabla anterior tiene en cuenta estos efectos pero, con el fin de mantener la comparabilidad con los trabajos antes citados, no se realiza corrección de los mismos.

5. ANALISIS BIVARIANTE EXPLORATORIO

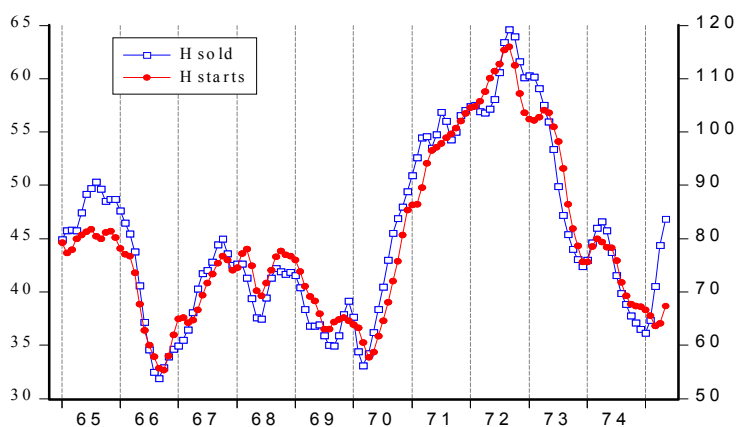
Los contrastes de diagnóstico de los modelos ARIMA estimados en la sección anterior no muestran inadecuación de los mismos a la muestra, por lo que van a servir de base para realizar la descomposición de las series en sus elementos subyacentes mediante el programa SEATS, Gómez y Maravall (1996). Los detalles de este procedimiento se describen en Burman (1980), Hillmer y Tiao (1982), Maravall (1987, 1993, 1994), entre otros.

Dichos modelos permiten estimar, para ambas series, sus componentes de tendencia, estacionalidad e irregularidad, cuya agregación da lugar a la serie observada. La interacción entre ellos es aditiva, ya que no ha sido preciso el uso de transformación logarítmica.

A continuación se examina, de forma bivalente, la relación entre los componentes subyacentes de las dos series. De esta manera, se realiza un análisis exploratorio de su interacción dinámica, considerando cada banda espectral por separado.

En el siguiente gráfico se muestran las tendencias, cada una con su propia escala:

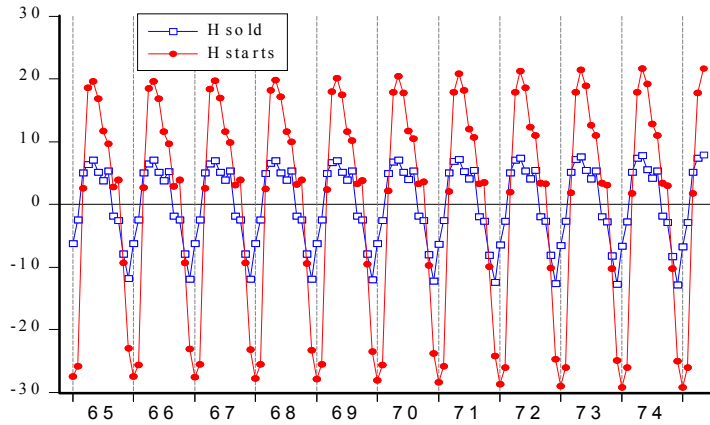
**Gráfico 5.1: Componentes subyacentes
Interacción bivalente: tendencia**



Ambas series poseen un elevado grado de conformidad, tanto en niveles como en primeras diferencias. Asimismo, mediante la función de correlación cruzada, se detecta un adelanto de un mes de *Hsold* respecto a *Hstarts*.

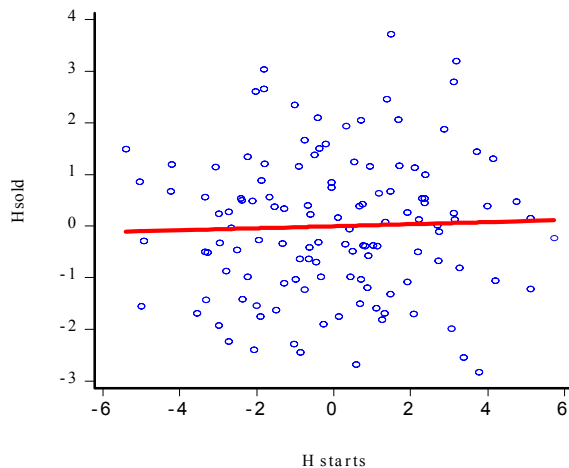
Los componentes estacionales también poseen una conformidad notable, como se observa en el gráfico siguiente:

Gráfico 5.2: Componentes subyacentes
Interacción bivalente: estacionalidad



Destaca la estabilidad de ambos componentes, la diferencia de amplitudes y, nuevamente, el ligero adelanto de un mes de *Hsold* respecto a *Hstarts*. Finalmente, el diagrama de dispersión de los elementos irregulares muestra una relación virtualmente nula entre ambos:

Gráfico 5.3: Componentes subyacentes
Interacción bivalente: irregularidad



En consecuencia, ambas series poseen importantes elementos comunes, vinculados con sus componentes estructurales (tendencia y estacionalidad) así como una ligera relación de adelanto de *Hsold*s respecto a *Hstarts*.

6. ANALISIS BVAR

Una vez realizado el análisis preliminar (tanto univariante como bivariante), se especifica, calibra, estima y diagnostica un modelo BVAR utilizando el prior de Raynauld-Simonato anteriormente expuesto. Dicho modelo servirá de base para un análisis estructural detallado, que incluye tanto la detección de posibles relaciones de cointegración como la identificación del mecanismo de impulso y propagación del sistema. Finalmente, se realiza una evaluación de la capacidad predictiva del modelo.

6.1. Especificación inicial

En primer lugar, tanto los resultados univariantes preliminares, que indican la presencia de estacionalidad y de un operador AR de orden 13⁸, como el moderado tamaño muestral sugieren $p=13$ como dimensión apropiada del modelo.

Por otra parte, dado que los modelos ARIMA que caracterizan a las series contienen los operadores $(1-B)$ y $(1-B^{12})$, la especificación del prior de Raynauld-Simonato debe centrarse en ellos:

$$\begin{aligned} \mu &= 0 \\ [6.1a] \quad \Phi_1 &= \Phi_{12} = -\Phi_{13} = I \\ \Phi_h &= 0 \quad h = 2..11 \end{aligned}$$

$$[6.1b] \quad \beta = \text{vec}(\Phi') \quad \text{con} \quad \Phi = (\mu \quad \Phi_1 \quad \dots \quad \Phi_{13})$$

La matriz de varianzas y covarianzas del prior sobre β sigue la especificación expresada en [2.10] y analizada en la segunda sección:

$$[6.2] \quad \text{diagonal}(V_\beta) = \begin{cases} v(\mu_i) = \infty \quad \forall i \\ v(\phi_{i,j,h}) = (\pi_1 F_{i,j}(\pi_2) st_h(\pi_3) (\sigma_{ii} / \sigma_{jj}))^2 \quad \forall i, j \quad \forall h \end{cases}$$

El hiperparámetro π_4 está inactivo debido a que el orden del modelo ($p=13$) anula los efectos de la función sd_h , véanse las ecuaciones [2.13] y [2.14]. La determinación numérica de [6.2] mediante el calibrado de los hiperparámetros $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ se describe a continuación.

6.2. Calibrado

El calibrado del modelo BVAR utiliza como función objetivo el logaritmo del determinante de la matriz de varianzas y covarianzas de los errores de predicción un paso adelante. Dichos errores se evalúan sobre las 17 últimas observaciones de la muestra (1974:01 - 1975:05). Se considera este criterio porque permite evaluar tanto el rendimiento predictivo individual

⁸ Vinculado con $(1-B)(1-B^{12})$.

como el conjunto. Asimismo, tiene una atractiva interpretación teórica en términos de verosimilitud, véase Doan *et al.* (1984).

El calibrado puede ser computacionalmente laborioso debido al tamaño del espacio hiperparamétrico y a que, frecuentemente, las funciones objetivo carecen de óptimos bien definidos, al adoptar perfiles bastante planos en regiones relativamente amplias de los hiperparámetros.

En este trabajo se ha utilizado el procedimiento de búsqueda axial, tomando como condiciones iniciales las proporcionadas por una búsqueda global realizada con un mallado grueso:

$$[6.3] \quad \begin{aligned} \pi_1 \in [0,4] \quad \pi_2 \in [0,1] \quad \pi_3 \in [0,4] \\ \nabla \pi_1 = 0.4 \quad \nabla \pi_2 = 0.1 \quad \nabla \pi_3 = 0.4 \end{aligned}$$

En esta etapa se evalúan 1000 modelos BVAR y los resultados de la optimización son:

Tabla 6.1: Calibrado inicial
Búsqueda global

π_1	π_2	π_3	$\log(E)$
4.00	0.10	2.00	11.4213

Estos valores se toman como punto de partida para una búsqueda axial efectuada sobre el mismo rango [6.3] de la global, pero con un incremento sustancialmente inferior ($\nabla \pi_i = 0.01, i=1..3$), lo que da como resultado una mayor resolución. Los resultados de esta búsqueda se ofrecen en la siguiente tabla:

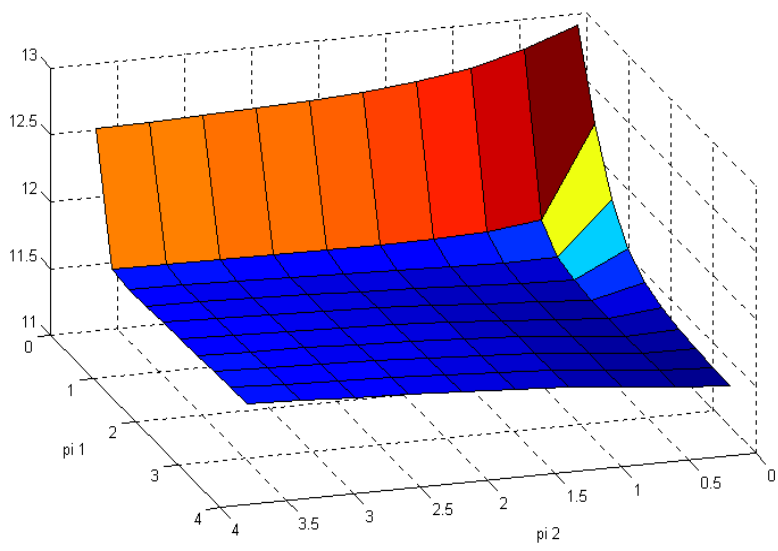
Tabla 6.2: Calibrado refinado
Búsqueda axial

Iteración	π_1	π_2	π_3	$\log(E)$
1	4.00	0.10	2.00	11.4213
2	4.00	0.14	2.00	11.4180
3	4.00	0.14	2.15	11.4174
4	4.00	0.14	2.15	11.4134
5	4.00	0.14	2.15	11.4134
6	4.00	0.14	2.16	11.4134

El hiperparámetro optimizado aparece en **negrita**.

Uno de los rasgos más llamativos es el valor relativamente elevado de π_1 así como la forma bastante plana de la función objetivo en relación a π_1 y, en menor medida, π_2 . El siguiente gráfico ilustra este hecho:

**Gráfico 6.1: Función $\varphi(\beta(\pi)) = \log(|E|)$
Evaluación con $\pi_3 = 2.16$**



En consecuencia, se ha optado por seleccionar un valor más contenido para el primer hiperparámetro, $\pi_1=1$ que, no obstante, sigue ofreciendo una considerable holgura al prior y modifica de forma marginal el rendimiento predictivo del modelo (incremento del 2.41% en la función objetivo).

Uno de los rasgos sugeridos por el análisis univariante preliminar es el adelanto que *Hsold* presenta frente a *Hstarts*. Con el fin de verificar si esta relación es significativa, se ha realizado un subcalibrado axial de F , considerando sus dos elementos no diagonales de forma independiente ($F_{1,2}$ y $F_{2,1}$) en lugar de uno solo (π_2). Como condiciones iniciales se asumen los resultados de la búsqueda axial anterior y simetría en la matriz F : $F_{2,1} = F_{1,2} = \pi_2$. A continuación se presenta este calibrado específico:

**Tabla 6.3: Calibrado específico de F
Búsqueda axial con $\pi_1=1.00$ y $\pi_2=2.16$**

Iteración	F		log (E)
	$F_{1,2}$	$F_{2,1}$	
0	0.14	0.14	11.6884
1	0.16	0.14	11.6872
2	0.16	0.97	11.4764
3	0.17	0.97	11.4762
4	0.17	0.97	11.4762

El hiperparámetro optimizado aparece en **negrita**.

Los resultados muestran una clara asimetría en lo que respecta a las interacciones dinámicas entre H_{sold} y H_{starts} , confirmando los resultados bivariantes preliminares que otorgaban a la primera un papel de indicador adelantado de la segunda. Finalmente, la posibilidad de restringir $F_{1,2}=0$ resulta admisible mientras que la restricción $F_{2,1}=0$ no lo es:

Tabla 6.4: Evaluación de la estructura triangular de F

F		
$F_{1,2}$	$F_{2,1}$	log (E)
0.17	0.97	11.4762
0.00	0.97	11.7533
0.17	0.00	12.3692

La expresión [6.2] requiere la determinación del factor de escala ($\sigma_{1,1}/\sigma_{2,2}$). Esta tarea se realiza estimando las varianzas implicadas mediante modelos AR univariantes del mismo orden ($p=13$) que el del modelo BVAR. Finalmente, se asume un prior difuso para la deriva μ .

En consecuencia, el calibrado final que se adopta en este trabajo es:

Tabla 6.5: Calibrado final

π_μ	π_1	F			π_3	Σ	
		$F_{1,2}$	$F_{2,1}$			$\sigma_{1,1}$	$\sigma_{2,2}$
100000	1.00	0.00	0.97	2.16	15.36	54.23	

Los resultados del calibrado revelan algunas características importantes del sistema bivalente:

- El elevado valor de π_1 sugiere que el prior utilizado, centrado en torno a un paseo aleatorio estacional con deriva, se considera con poca confianza, aún cuando dicho modelo forma el núcleo no estacionario de los modelos ARIMA de las series elementales.
- Este hecho podría indicar la presencia de una relación de cointegración, de forma que las raíces unitarias contenidas en sus modelos individuales sean comunes a ambas series y no, como asume el prior, específicas. Esta conjetura será examinada con detalle al realizar el análisis canónico del modelo.
- La estructura claramente asimétrica de F permite considerar que H_{sold} lidera dinámicamente a H_{starts} , pudiéndose establecer una relación de causalidad de tipo Granger de la primera respecto a la segunda.
- El elevado valor de π_3 indica un decaimiento bastante rápido de los parámetros hacia sus valores medios (nulos), esto es, aplica una constricción rápida hacia cero de las matrices Φ_h , con $h=2..11$.

6.3. Estimación y diagnóstico

Una vez calibrado el prior sobre β , se estiman los parámetros del modelo utilizando el procedimiento de estimación mixta de Theil-Goldberger. Por

razones de simplicidad computacional, la estimación se realiza ecuación por ecuación. Los resultados de la estimación, centrados en las matrices más relevantes, se ofrecen a continuación:

**Tabla 6.6: Modelo BVAR
Estimación mixta Theil-Goldberger**

	Estimación		Desviación típica	
μ	5.18		2.08	
	-2.58		4.33	
Φ_1	0.96	0.00	0.07	0.01
	1.04	0.40	0.18	0.12
Φ_{12}	0.56	0.00	0.08	0.01
	0.22	0.45	0.18	0.11
Φ_{13}	-0.52	0.00	0.08	0.01
	-0.35	-0.28	0.23	0.09
Σ / Γ	16.42	0.35		
	8.63	37.05		

Las restantes matrices no son significativas, si bien esto ha de considerarse de forma aproximada dada la especial naturaleza de la estimación de estos modelos. Debe recordarse que lo que se persigue con la metodología VAR y BVAR es la estimación de un sistema en su conjunto, no la de sus elementos individuales. Con las cautelas debidas, la estimación refleja adecuadamente la naturaleza antes comentada del prior así como el carácter causal de *Hsold* respecto a *Hstarts*.

El modelo BVAR estimado no es rechazado por la muestra, a tenor del análisis de sus residuos. Así, tanto las matrices de correlaciones cruzadas como el estadístico de Hosking (1980)⁹ resultan conformes con un proceso bivalente de tipo ruido blanco. El mismo diagnóstico emana del análisis de correlaciones canónicas de Tsay y Tiao (1985), cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla:

**Tabla 6.7: Modelo BVAR
Análisis SCAN de los residuos**

q=>	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0

⁹ Sus valores son 26.69 y 45.42 para $h=8$ y $h=12$, respectivamente.

6.4. Análisis estructural

Se puede mejorar de forma sustancial la comprensión del modelo multivariante si se realiza un análisis estructural del mismo, véase Sims (1980) y Lütkepohl (1991). En particular, la descomposición de la varianza de los errores de predicción con distintos horizontes y el análisis de las funciones de respuesta a los impulsos son dos herramientas muy útiles para estudiar la dinámica del sistema.

La interpretación estructural de un modelo en forma reducida (como los BVAR) requiere el uso de hipótesis adicionales sobre la naturaleza de las interacciones contemporáneas entre las variables, pudiendo ser estas hipótesis objeto de discusión, véase Sims (1986a), Lütkepohl (1991), Keating (1992) y Stock y Watson (2001), entre otros.

En un sistema bivariante existen dos estructuras compatibles con la forma reducida asociada al BVAR. La ortogonalización de los residuos se ha efectuado a través de una descomposición de Cholesky, asumiendo que la ordenación es $Hsold \rightarrow Hstarts$, esto es, que la primera lidera a la segunda en la interacción estática, de la misma forma que lo hace en la dinámica. No obstante, los resultados son robustos frente a la ordenación debido a la moderada correlación contemporánea (0.35) entre las innovaciones de la forma reducida.

La matriz de multiplicadores de impacto derivada de la descomposición de Cholesky es:

$$[6.4] \quad \Psi_0 = \begin{bmatrix} 4.05 & 0 \\ 2.13 & 5.70 \end{bmatrix}$$

Esta matriz confirma la naturaleza más volátil de los impulsos que inciden sobre $Hstarts$ que la de los que afectan a $Hsold$. Asimismo, identifica una relación contemporánea más que proporcional entre $Hstarts$ y $Hsold$:

$$[6.5] \quad Hstarts_t = 2.13 Hsold_t + \varepsilon_t$$

siendo ε_t la innovación estructural correspondiente.

El papel causal de $Hsold$ resulta evidente, como muestra la descomposición de la varianza de los errores de predicción del modelo BVAR:

Tabla 6.8: Modelo BVAR
Descomposición de la varianza de los errores de predicción

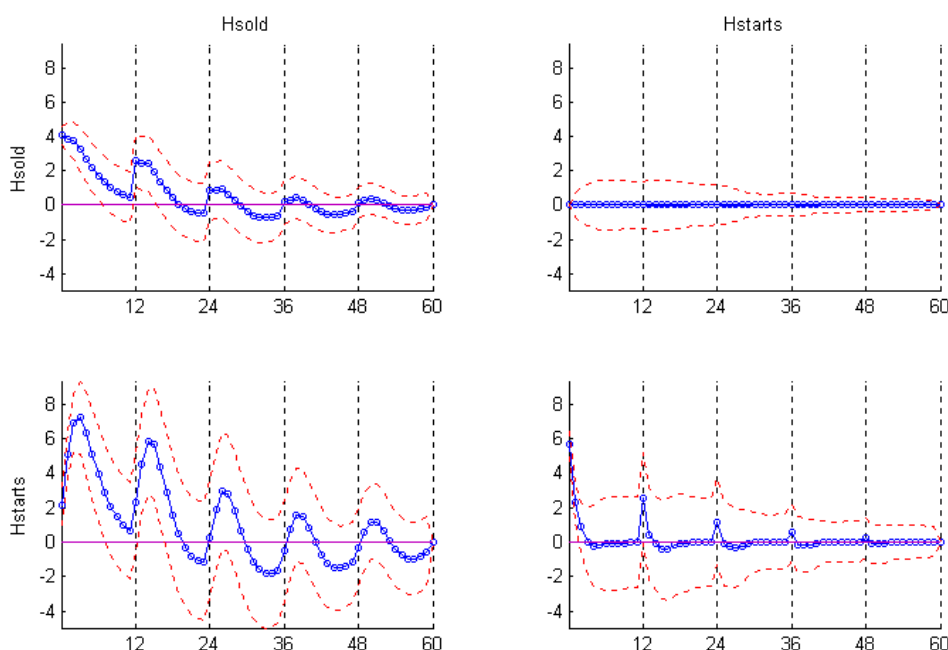
Incertidumbre en la predicción de:				
		Hsold	Hstarts	
Explicada por:				
Horizonte	Hsold	Hstarts	Hsold	Hstarts
1	100	0	12	88
2	100	0	45	55
3	100	0	67	33
4	100	0	77	23
5	100	0	82	18
6	100	0	84	16
12	100	0	86	14
24	100	0	89	11
36	100	0	89	11
48	100	0	90	10
60	100	0	90	10

Resultados expresados como porcentaje

El mecanismo detallado de transmisión de las innovaciones estructurales puede examinarse mediante la función de respuesta a los impulsos. Dicha función, junto con sus intervalos de confianza¹⁰, se muestra en el siguiente gráfico:

¹⁰ Estos intervalos, asociados a dos desviaciones típicas, se calculan de forma analítica, véase Lütkepohl (1991).

Gráfico 6.2: Modelo BVAR
Función de respuesta a los impulsos ortogonalizados
Filas: respuestas. Columnas: impulsos



Estos gráficos sugieren las siguientes conclusiones:

- *Hsold* lidera el sistema en todos los sentidos: regular y estacional, corto y largo plazo.
- La respuesta de *Hstarts* frente a un *shock* en *Hsold* es positiva, intensa, persistente y acusadamente estacional. Asimismo, el impacto máximo se detecta con un desfase de tres meses, lo que confirma el carácter de indicador adelantado de la primera respecto a la segunda.
- Los elementos idiosincrásicos de *Hstarts* son poco duraderos y claramente estacionales. Por el contrario, los de *Hsold* son persistentes y con una estacionalidad menos acusada que los de *Hstarts*.

6.5. Análisis canónico

El análisis canónico de Box y Tiao (1977) es una técnica flexible y potente para identificar factores comunes, simplificar estructuras complejas y detectar relaciones de cointegración. Referencias adicionales son: Bewley *et al.* (1994), Bewley y Yang (1995), Bossaerts (1988), Peña (1990), Tiao *et al.* (1993), Gonzalo (1994), Galeano y Peña (2000) y Peña y Poncela (2002).

Este análisis permite estimar k variables, $W_t: k \times 1$, a partir de una transformación lineal de las k series observadas, Z_t :

$$[6.6] \quad W_t = M Z_t$$

Las filas de la matriz M que define a los componentes canónicos son los autovectores asociados a los autovalores ordenados (de mayor a menor) de la siguiente matriz:

$$[6.7] \quad Q = \Gamma_Z(0)^{-1} \Gamma_{Ze}(0) = I - \Gamma_Z(0)^{-1} \Sigma$$

donde $\Gamma_Z(0)$, $\Gamma_{Ze}(0)$ y Σ son, respectivamente, las matrices de varianzas y covarianzas de Z_t , del predictor óptimo de Z_{t+1} basado en un modelo BVAR y de las innovaciones U_t de dicho modelo.

La matriz Q es el análogo multivariante del coeficiente de determinación R^2 del análisis de regresión. En consecuencia, sus autovalores ($0 \leq \lambda_k \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 1$) miden el grado de predecibilidad de las variables W_t que se forman a partir de sus autovectores: cuanto mayor es λ_i , más precisa resulta la predicción de $w_{it} = m_i(\lambda_i) Z_t$.

Box y Tiao muestran que, si el sistema posee r raíces unitarias, entonces Q también. En consecuencia, existen $k-r$ combinaciones lineales de Z_t que son estacionarias y que definen, por tanto, relaciones de cointegración (Peña, 1990). De esta manera, el análisis canónico permite identificar y estimar relaciones de cointegración basadas en una modelización explícita y parsimoniosa de los datos. Así, si existen r autovalores unitarios en Q y $k-r$ que no lo son, se tienen r componentes W_t no estacionarios que dan cuenta de la falta de estacionariedad de las k series originales, y $k-r$ componentes que sí son estacionarios y que reflejan relaciones de equilibrio.

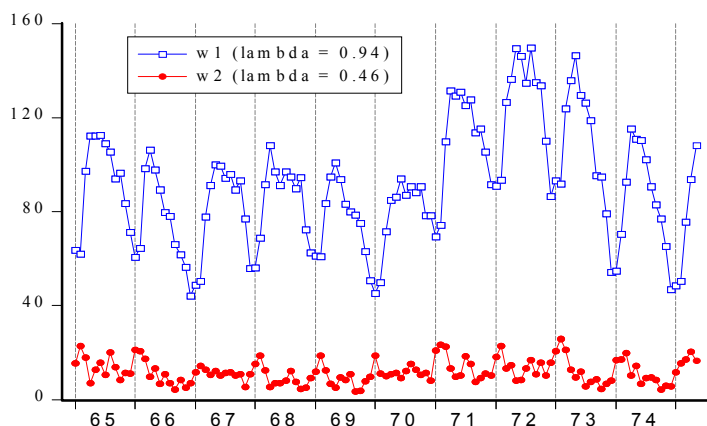
En la siguiente tabla se muestran los resultados del análisis canónico efectuado sobre el modelo BVAR:

**Tabla 6.9: Modelo BVAR
Análisis canónico**

λ	M	
0.94	0.45	0.89
0.46	0.93	-0.38

El primer autovalor (0.94) muestra la presencia de un componente canónico no estacionario y el segundo (0.46) la de uno que sí lo es. En el siguiente gráfico se ilustran sus características, así como su notable diferencia de escala:

**Gráfico 6.3: Modelo BVAR
Componentes canónicos**



Adicionalmente, las propiedades estocásticas de los componentes también pueden informar directamente acerca de la presencia de factores comunes y relaciones de cointegración. En particular, Bossaerts (1988) propone el uso de contrastes univariantes de especificación sobre estos componentes, con el fin de dilucidar de forma relativamente sencilla estos aspectos del sistema. De esta manera, se identifican y estiman modelos ARIMA univariantes para los componentes canónicos, obteniéndose los siguientes resultados:

$$[6.8a] \quad (1-B)(1-B^{12})w_{1,t} = (1-0.82B^{12})b_{1,t} \quad \sigma_{b_1}^2 = 13.54$$

$$[6.8b] \quad (1-0.49B)(1-0.39B^{12})w_{2,t} = b_{2,t} \quad \sigma_{b_2}^2 = 47.81$$

Combinando estos resultados con los de la tabla 6.9 se aprecia, en primer lugar, que existe un factor común no estacionario responsable tanto de la tendencia volátil de las series individuales como de su estacionalidad cuasi-determinista. Obsérvese la semejanza entre los modelos de w_1 y los de $Hsold$ y $Hstarts$, véase el apéndice A para una exposición más detallada.

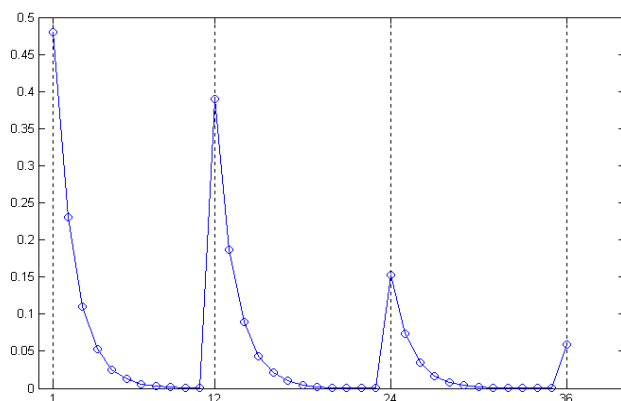
Este factor común se puede estimar mediante un índice compuesto obtenido aplicando a $Hsold_t$ y $Hstarts_t$ el autovector $e(\lambda_1)=[0.48 \ 0.89]$. Las ponderaciones de este índice revelan que la síntesis estática del sistema reside en $Hstarts$ mientras que, a tenor de los resultados del análisis estructural, la dinámica se concentra en $Hsold$.

El segundo componente canónico refleja una relación contemporáneamente estable o de cointegración. Dicha relación posee elementos regulares y estacionales. Normalizando el autovector asociado al segundo autovalor podemos considerar la siguiente relación de cointegración, muy similar a la estructural representada en [6.5]:

$$[6.9] \quad Hstarts_t = 2.45 Hsold_t + w_{2,t}$$

El siguiente gráfico muestra la dinámica del mecanismo de corrección de las desviaciones respecto a la relación de largo plazo expresada en [6.9]:

**Gráfico 6.4: Modelo BVAR
Relación de cointegración. Mecanismo de corrección de error**



La relación de equilibrio a largo plazo es de tipo multiplicador por ser más que proporcional, lo que explica, al menos parcialmente, la mayor volatilidad de *Hstarts* respecto a *Hsold*. El mecanismo de retorno al equilibrio actúa de manera bastante rápida, puntuado por elementos estacionales moderadamente inerciales que prolongan su efecto en el tiempo.

6.6. Rendimiento predictivo

Las siete observaciones correspondientes al período 1975:06-1975:12 sirven de base para un análisis del rendimiento predictivo del modelo BVAR. Las conclusiones que se obtienen han de tomarse de forma indicativa, dado el reducido tamaño de la muestra sobre la que se establecen los resultados.

En la siguiente tabla aparecen los promedios de los errores de predicción en valor absoluto, expresados porcentualmente (MAPE). Se consideran dos horizontes (1 y 7) y tres modelos: BVAR, BAR y AR. El segundo elimina la interacción presente en el primero, haciendo $F=0$, y el tercero da un paso más y suprime las restricciones bayesianas. En los tres casos se toma $p=13$ y el calibrado expuesto en la tabla 6.5.

Tabla 6.10: Rendimiento predictivo

Horizonte	Serie	MAPE		
		BVAR	BAR*	AR*
1	Hsold	7.06	1.00	1.12
	Hstarts	8.51	1.07	1.01
7	Hsold	8.75	1.00	1.26
	Hstarts	7.35	1.35	1.62

* Ratios respecto al modelo BVAR

A juzgar por los valores de los MAPE, los errores de predicción son importantes en todos los modelos, indicando que ambas series son relativamente difíciles de pronosticar.

Por otra parte, se advierte una clara mejora al pasar del marco univariante al multivariante, sobre todo en lo que concierne a *Hstarts*, confirmando el papel causal que ejerce *Hsold*.

Finalmente, las restricciones bayesianas juegan un papel importante en la mejora de las predicciones a siete meses de *Hstarts*, de forma consistente con el carácter triangular de la matriz *F* y el análisis estructural realizado.

7. RELACION ENTRE LOS MODELOS BVAR Y VARMA: ASPECTOS EMPÍRICOS

En esta sección se examina la relación entre los modelos BVAR y VARMA desde una perspectiva aplicada, utilizando como banco de pruebas las mismas series *Hsold* y *Hstarts* ya analizadas.

En Quilis (2004b) se describen los resultados de la aplicación de una metodología de especificación de modelos VARMA estacionales a estas series. El modelo final que se obtiene es un VAR estacional multiplicativo de la forma:

$$[7.1] \quad (I - \Phi B)(I - \Gamma B^{12})Z_t = \mu + U_t$$

La estimación de dicho modelo se ofrece en la siguiente tabla:

**Tabla 7.1: Modelo VAR estacional multiplicativo
Estimación por máxima verosimilitud exacta**

	Estimación		Desviación típica		Autovalores	
μ	2.16		0.96		-	
	-5.49		2.73		-	
Φ_1	0.89	0.00	0.04	-	0.89	
	1.14	0.35	0.14	0.07	0.35	
Φ_{12}	0.57	0.00	0.07	-	0.57	
	0.22	0.57	0.14	0.06	0.57	
Σ / Γ	17.74	0.42			47.40	1.42
	11.47	42.97			13.31	0.58

Los parámetros en **negrita** están restringidos

El cociente de verosimilitudes justifica la imposición de la restricción que establece que *Hsold* causa, en sentido Granger, a *Hstarts*:

$$[7.2] \quad \tau = \frac{-2 \log \ell_E^r}{-2 \log \ell_E} = 1.0076$$

La semejanza con el modelo BVAR expuesto en la sección anterior es muy elevada en lo que concierne a la estimación, al mecanismo de propagación implicado y al análisis canónico, véase Quilis (2004b) para una exposición detallada de estos resultados.

Por otra parte, ambos modelos difieren sustancialmente del que utilizan Liu y Hudak (1995) y Tiao (2001). En ambos casos se aplica una diferenciación estacional a las dos series para especificar el modelo multivariante, formulando uno multiplicativo de la forma VARMA (1,0)(0,1)₁₂ para las series diferenciadas:

$$[7.3] \quad (I - \Phi B)(I - B^{12})Z_t = (I - \Theta B^{12})U_t$$

Los resultados de la estimación de este modelo se muestran a continuación:

**Tabla 7.2: Modelo VARMA estacional multiplicativo
Estimación por máxima verosimilitud exacta**

	Estimación		Desviación típica		Autovalores	
Φ_1	0.93	0.00	0.04	-	0.93	
	1.03	0.42	0.13	0.42	0.42	
Θ_{12}	0.98	0.00	0.05	-	0.98	
	0.00	0.94	-	0.06	0.94	
Σ / Γ	12.10	0.35			31.61	1.35
	5.95	29.80			10.28	0.65

Los parámetros en **negrita** están restringidos

Nuevamente, el cociente de verosimilitudes fundamenta la restricción que establece que *Hsold* causa a *Hstarts*, resultado especialmente robusto frente al modelo empleado:

$$[7.4] \quad \tau = \frac{-2 \log \ell_E^r}{-2 \log \ell_E} = 1.0054$$

Tanto el análisis BVAR efectuado en este trabajo como el VARMA antes mencionado, indican claramente que no es necesario diferenciar simultáneamente ambas series ni estacional ni regularmente, por lo que el carácter no invertible del operador VMA(1)₁₂ obedece, principalmente, a una sobrediferenciación y no, como señalan los autores, a la estacionalidad cuasi-determinista de ambas series. Obsérvese que el modelo [7.3] excluye la posibilidad de que dicho fenómeno sea común a las dos series, como sugiere el análisis bivalente preliminar y como confirman los modelos BVAR y VAR(1)(1)₁₂.

Como ya se ha señalado, la estacionalidad cuasi-determinista de ambas series puede ser recogida de forma parsimoniosa con los modelos BVAR o VAR(1)(1)₁₂ ya que es una parte esencial del factor común no estacionario del sistema. La estacionalidad, igual que la tendencia, es un elemento compartido por ambas series y no, como ocurre con el modelo [7.3], algo idiosincrásico.

Como consecuencia de todo ello, el comportamiento dinámico de ambos modelos es sustancialmente diferente, así como el correspondiente análisis canónico, véase Quilis (2004b) para más detalles.

Finalmente, Hillmer y Tiao (1979) utilizan un modelo VARMA(1,1,1)(0,1,1)₁₂ que, a la luz de los resultados tanto de Liu-Hudak y Tiao como de los de este trabajo, aparece claramente sobrediferenciado, tanto regular como estacionalmente.

8. CONCLUSIONES FINALES

Los resultados de la aplicación de la modelización BVAR estacional expuesta en este trabajo permiten extraer una serie de conclusiones generales.

En primer lugar, el análisis ARIMA univariante y la extracción de señales basada en dichos modelos ha permitido realizar un análisis exploratorio especialmente útil para fijar la estructura del prior y, al menos parcialmente, determinarlo numéricamente.

Por otra parte, el calibrado en términos de verosimilitud ha jugado un papel muy relevante, ya que ha permitido detectar y considerar relaciones de cointegración que el prior de Raynauld-Simonato no tiene en cuenta. El mecanismo de ajuste bayesiano ha funcionado adecuadamente, haciendo que la distribución *a posteriori* sí tuviera en cuenta este fenómeno. Asimismo, el calibrado ha posibilitado la identificación de relaciones de causalidad entre las series.

El calibrado puede ser una tarea computacionalmente laboriosa, especialmente si la dimensión del espacio de hiperparámetros es elevada. No obstante, al menos en lo que concierne a la aplicación desarrollada en este trabajo, el procedimiento de búsqueda axial ha dado buenos resultados, tanto en términos de su velocidad de convergencia como en lo que concierne a la coherencia de sus resultados con los de otros procedimientos: el elevado valor de π_1 con los resultados del análisis canónico que indicaban la presencia de cointegración; la naturaleza asimétrica de F con el análisis bivariante exploratorio que sugería un papel causal para H_{sold} respecto a H_{starts} y, finalmente, el rápido decaimiento hacia cero implicado por π_3 para los parámetros intermedios con la estructura derivada del análisis VARMA.

Por otra parte, el análisis estructural ha demostrado su utilidad para interpretar la dinámica del sistema, de forma que la presencia del fenómeno estacional, en lugar de dificultar dicha interpretación, la ha enriquecido. Asimismo, el análisis canónico ha demostrado su capacidad para identificar factores comunes y relaciones de cointegración.

La relación entre los modelos BVAR y los VARMA es de complementariedad, de forma que los resultados de un enfoque se pueden corroborar o refutar a

partir de los del otro. Por lo tanto, su uso conjunto es claramente recomendable.

El uso de modelos multivariantes en los que la estacionalidad es incorporada de forma explícita permite evitar el recurso a procedimientos de diferenciación, desestacionalización o inclusión de variables ficticias estacionales y eludir, en consecuencia, sus inconvenientes. En particular, los modelos BVAR pueden aumentar de tamaño con relativa facilidad¹¹, debido a que son susceptibles de estimación ecuación por ecuación de forma analítica, sin tener que recurrir a métodos numéricos. Por otra parte, la estructura *a priori* permite incorporar una gran cantidad de información extramuestral de una manera ordenada.

APÉNDICE A. SERIES OBSERVADAS Y COMPONENTES CANÓNICOS: DISTANCIA DE PICCOLO

Una forma sencilla de cuantificar el grado de semejanza entre dos series temporales consiste en evaluar su distancia de Piccolo, esto es, la distancia euclídea entre las representaciones $AR(\infty)$ de los modelos ARIMA de las series objeto de análisis. Una exposición detallada se encuentra en Piccolo (1984, 1990) y Corduas (1992).

La aplicación de esta métrica a las series originales (*Hsold* y *Hstarts*) y a sus componentes canónicos ($w_{1,t}$ y $w_{2,t}$) genera los siguientes resultados:

Tabla A.1: Series observadas y componentes canónicos Distancia de Piccolo

	Hsold	Hstarts	w_1	w_2
Hsold	1	0.0589	0.2456	0.5417
Hstarts		1	0.2800	0.5231
w_1			1	0.6550
w_2				1

La métrica de Piccolo confirma, en primer lugar, la semejanza entre las series observadas detectada a lo largo del estudio y, en segundo lugar, la afinidad del primer componente canónico (no estacionario) con dichas series. Esta afinidad es sustancialmente menor en el caso del segundo componente (estacionario). Finalmente, la distancia máxima se registra entre los dos componentes $w_{1,t}$ y $w_{2,t}$, lo que corrobora el carácter diferenciador del análisis canónico, al considerar al vector de series observadas Z_t generado a partir de dos factores contemporáneamente ortogonales¹² y con características dinámicas sustancialmente diferentes entre sí.

¹¹ La experiencia sugiere que los VARMA estacionales no tienen esa facilidad para aumentar de tamaño. Así, en sistemas con cuatro series temporales mensuales el autor ha encontrado serios problemas para aplicar el enfoque VARMA poco restringido utilizado en Quilis (2004b). En qué medida es una limitación del *software* o de la metodología es un tema que está siendo activamente investigado.

¹² Nótese que, de [6.6], se deduce $Z_t = M^{-1}W_t$.

BIBLIOGRAFIA

- ÁLVAREZ, L.J. y BALLABRIGA, F.C. (1994) "BVAR models in the context of cointegration: a Monte Carlo experiment", Banco de España, Documento de Trabajo n. 9405.
- BARSKY, R.B. y MIRON, J.A. (1989) "The seasonal cycle and the business cycle", *Journal of Political Economy*, vol. 97, n. 3, p. 503-534.
- BÓGALO, J. y QUILIS, E.M. (2003) "Estimación del ciclo económico mediante filtros de Butterworth", Instituto Nacional de Estadística, *Boletín Trimestral de Coyuntura*, n. 87, p. 185-205.
- BEWLEY, R., ORDEN, D., YANG, M. y FISHER, L.A. (1994) "Comparison of Box-Tiao and Johansen canonical estimators of cointegrating vectors in VEC(1) models", *Journal of Econometrics*, n. 64, p. 3-27.
- BEWLEY, R. y YANG, M. (1995) "Tests for cointegration based on canonical correlation analysis", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 90, n. 431, p. 990-996.
- BOSSAERTS, P. (1988) "Common nonstationary components of asset prices," *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 12, n. 2/3, p. 347-364.
- BOX, G.E.P. y JENKINS, G.M. (1970) *Time series analysis, forecasting and control*, Holden Day, San Francisco.
- BOX, G.E.P. y TIAO, G.C. (1977) "A canonical analysis of multiple time series", *Biometrika*, vol. 64, n. 2, p. 355-365.
- BURMAN, J.P. (1980) "Seasonal adjustment by signal extraction", *Journal of the Royal Statistical Society*, series A, n. 143, p. 321-337.
- CANOVA, F. (1992) "An alternative approach to modeling and forecasting seasonal time series", *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 10, n. 1, p. 97-108.
- CANOVA, F. (1993) "Forecasting time series with common seasonal patterns", *Journal of Econometrics*, vol. 55, n. 1. p. 73-200.
- CONFERENCE BOARD, THE (2004) "Components of the U.S. Business Cycle Indicators", Nota disponible en: <http://www.globalindicators.org>
- CORDUAS, M. (1992) "Misure di distanza tra serie storiche e modelli parametrici", Università di Napoli, Quaderni dell'Instituto Economico Finanziario, n. 3.
- CHOI, B. (1992) *ARMA model identification*, Springer-Verlag, New York.
- DENIAU, C., FIORI, G. y MATHIS, A. (1992) "Sélection du nombre de retards dans un modèle VAR, conséquences éventuelles du choix des critères", *Economie et Prévision*, n. 106, p. 61-69.
- DOAN, TH., LITTERMAN, R.B. y SIMS, CH.A. (1984) "Forecasting and conditional projection using realistic prior distributions", *Econometric Review*, n. 3, p. 1-144.
- ENDERS, W. (1995) *Applied econometric time series*, John Wiley and Sons, New York.
- ESPASA, A. y CANELO, J.R. (1993) *Métodos cuantitativos para el análisis de la coyuntura económica*, Alianza Editorial, Madrid.
- GALEANO, P. y PEÑA, D. (2000) "Multivariate analysis in vector time series", *Resenhas*, vol. 4, p. 383-404.
- GHYSELS, E. y PERRON, P. (1993) "The effect of seasonal adjustment filters on tests for a unit root", *Journal of Econometrics*, vol. 55, p. 57-98.
- GÓMEZ, V. y MARAVALL, A. (1996) "Programs TRAMO and SEATS", Documento de Trabajo n. 9628, Banco de España.
- GONZALO, J. (1994) "Five alternative methods for estimating long-run equilibrium relationships", *Journal of Econometrics*, vol. 60, p. 203-33.
- GRANGER, C.W.J. (1978) "Seasonality: causation, interpretations and implications", en Zellner, A. (Ed.) *Seasonal analysis of economic time series*, U.S. Department of Commerce, Bureau of Census, Washington.
- HARVEY, A.C. y SCOTT, A. (1994) "Seasonality in dynamic regression models", *Economic Journal*, vol. 104, p. 1324-1345.
- HILLMER, S.C. y TIAO, G.C. (1979) "Likelihood function of stationary multiple autoregressive moving average models", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 74, n. 367, p. 652-660.
- HILLMER, S.C. y TIAO, G.C. (1982) "An ARIMA model-based approach to seasonal adjustment", *Journal of the American Statistical Society*, vol. 77, n. 377, p. 63-70.
- HOSKING, J.R.M. (1980) "The multivariate portmanteau test", *Journal of the American Statistical Association*, n. 75, p. 602-608.
- HYLLEBERG, S. (1994) "Modelling seasonal variation", en Hargreaves, C.P. (Ed.) *Nonstationary time series analysis and cointegration*, Oxford University Press, New York.

- INGRAM, B.F. y WHITEMAN, C.H. (1994) "Supplanting the 'Minnesota' prior. Forecasting macroeconomic time series using real business cycle model priors", *Journal of Monetary Economics*, vol. 34, p. 497-510.
- JUDGE, G.C., GRIFFITHS, W.E., CARTER HILL, R. y LEE, T.C. (1980) *The theory and practice of econometrics*, John Wiley and Sons, New York.
- KEATING, J. (1992) "Structural approaches to vector autoregressions", Federal Reserve Bank of St. Louis, *Review*, vol. 74, n. 5, p. 37-57.
- LITTERMAN, R.B. (1984a) "Specifying vector autoregressions for macroeconomic forecasting", Federal Reserve Bank of Minneapolis, Staff Report n. 92.
- LITTERMAN, R.B. (1984b) "Forecasting and policy analysis with bayesian vector autoregression models", Federal Reserve Bank of Minneapolis, *Quarterly Review*, vol. 8, n. 4, p. 30-41.
- LITTERMAN, R.B. (1986) "Forecasting with bayesian vector autoregressions - five years of experience", *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 4, n. 1, p. 25-38.
- LIU, L.M. (1986) "Multivariate time series analysis using vector ARMA models", SCA Monograph.
- LIU, L.M. y HUDAK, G.B. (1995) *The SCA Statistical System. Vector ARMA modeling of multiple time series*, SCA Corp., Oak Ridge, Illinois.
- LÜTKEPOHL, H. (1991) *Introduction to multiple time series analysis*, Springer Verlag, Berlín.
- MARAVALL, A. (1987) "Descomposición de series temporales. Especificación, estimación e inferencia", *Estadística Española*, vol. 29, n. 114, p. 11-69.
- MARAVALL, A. (1993) "Stochastic linear trends. Models and estimators", *Journal of Econometrics*, n. 56, p. 5-37.
- MARAVALL, A. (1994) "Unobserved components in economic time series", en Pesaran, H., Schmidt, P. y Wickens, M. (Eds.) *The handbook of applied econometrics*, vol. 1, Basil Blackwell, Oxford.
- NEGRO, M. DEL. y SCHORFEID, F. (2003a) "Take your model bowling: forecasting with general equilibrium models", Federal Reserve Bank of Atlanta, *Economic Review*, vol. 88, n. 4, p. 35-50.
- NEGRO, M. DEL. y SCHORFEID, F. (2003b) "Priors from general equilibrium models for VARs", Federal Reserve Bank of Atlanta, Working Paper n. 2002-14a.
- OSBORN, D.R. (1988) "Seasonality and habit persistence in a life cycle model of consumption", *Journal of Applied Econometrics*, vol. 3, p. 255-266.
- PICCOLO, D. (1984) "Una topología per la classe dei processi ARIMA", *Statistica*, vol. XLIV, n. 1, p. 47-59.
- PICCOLO, D. (1990) "A distance measure for classifying ARIMA models", *Journal of Time Series Analysis*, vol. 11, n. 2, p. 153-64.
- PEÑA, D. (1990) "Cointegración y reducción de dimensionalidad en series temporales multivariantes", *Cuadernos Económicos de ICE*, n. 44, p. 109-126.
- PEÑA, D. y PONCELA, P. (2002) "Dimension reduction in multivariate time series", Universidad Carlos III, Documento Interno.
- QUILIS, E.M. (2002) "Modelos BVAR: especificación, estimación e inferencia", Instituto de Estudios Fiscales, Papeles de Trabajo n. 8/02.
- QUILIS, E.M. (2004a) "BayVAR: una librería Matlab para el análisis VAR Bayesiano", Instituto Nacional de Estadística, Documento Interno.
- QUILIS, E.M. (2004b) "Modelos VARMA estacionales: una aplicación", Instituto Nacional de Estadística, Documento Interno.
- RAYNAULD, J. y SIMONATO, J.G. (1993) "Seasonal BVAR models", *Journal of Econometrics*, vol. 55, p. 203-229.
- REINSEL, G.C. (1983) "Some results on multivariate autoregressive index models", *Biometrika*, vol. 70, n. 1, p. 145-156.
- REINSEL, G. (1993) *Elements of multivariate time series analysis*, Springer Verlag, New York.
- ROBERTSON, J.C. y TALLMAN, E.W. (1999) "Vector autoregressions: forecasting and reality", Federal Reserve Bank of Atlanta, *Economic Review*, first quarter, p. 4-18.
- SARGENT, Th.J. (1979) "Estimating vector autoregressions using methods not based on explicit economic theories", Federal Reserve Bank of Minneapolis, *Quarterly Review*, vol. 3, n. 3, p. 8-15.
- SIMS, Ch.A. (1974) "Seasonality in regression", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 69, n. 347, p. 618-626.
- SIMS, Ch.A. (1980) "Macroeconomics and reality", *Econometrica*, vol. 48, n. 1, p. 1-48.
- SIMS, Ch.A. (1986a) "Are forecasting models usable for policy analysis?", Federal Reserve Bank of Minneapolis, *Quarterly Review*, vol. 10, n. 1, p. 2-15.

- SIMS, Ch.A. (1986b) "BAYESMTH: A program for multivariate Bayesian interpolation", University of Minnesota, Center for Economic Research, Discussion Paper n. 234.
- SIMS, Ch.A. (1993) "A nine-variable probabilistic macroeconomic forecasting model", en Stock, J.H. y Watson, M.W. (Eds.) *Business cycles, indicators and forecasting*, NBER Studies in Business Cycles, vol. 28, Univ. of Chicago Press, Chicago.
- SIMS, Ch.A. y ZHA, T. (1998) "Bayesian methods for dynamic multivariate models", *International Economic Review*, vol. 39, p. 949-968.
- STOCK, J.H. y WATSON, M.W. (2001) "Vector autoregressions", *Journal of Economic Perspectives*, vol. 15, n. 4, p. 101-115.
- TIAO, G.C., BOX, G.E.P., GRUPE, M.R., HUDAK, G.B., BELL, W.R. y CHANG, I. (1979) "The Wisconsin Multiple Time Series program (WMTS). A preliminary guide", Department of Statistics, University of Wisconsin, Documento Interno.
- TIAO, G.C., TSAY, R.S. y WANG, T. (1993) "Usefulness of linear transformations in multivariate time series analysis", *Empirical Economics*, p. 567-595.
- TIAO, G.C. y BOX, G.E.P. (1981) "Modelling multiple time series with applications", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 76, n. 376, p. 802-816.
- TIAO, G. C. (2001), "Vector ARMA models". En *A course in Time Series Analysis*. Ed. Peña, D., Tiao, G. C., and Tsay, R. S. (Eds.) John Wiley and Sons, New York.
- TODD, R.M. (1984) "Improving economic forecasting with bayesian vector autoregressions", Federal Reserve Bank of Minneapolis, *Quarterly Review*, vol. 8, n. 4, p. 18-29.
- TODD, R.M. (1988) "Implementing bayesian vector autoregressions", Federal Reserve Bank of Minneapolis, Working Paper n. 384.
- TODD, R.M. (1990b) "Periodic linear-quadratic methods for modeling seasonality", *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 14, n. 3-4, p. 763-795.
- TSAY, R.S. y TIAO, G.C. (1985) "Use of canonical analysis in time series model identification", *Biometrika*, vol. 72, n. 2, p. 299-315.
- WALLIS, K.F. (1974) "Seasonal adjustment and relations between variables", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 69, n. 345, p. 18-31.
- ZHA, T. (1998) "A dynamic multivariate model for use in formulating policy", Federal Reserve Bank of Atlanta, *Economic Review*, first quarter, p. 16-29.