

BANCO DE ESPAÑA

TRATAMIENTO DE PREDICCIONES CONFLICTIVAS:
EMPLEO EFICIENTE
DE INFORMACION EXTRAMUESTRAL

Luis Julián Álvarez, Juan Carlos Delrieu y Javier Jareño

SERVICIO DE ESTUDIOS
Documento de Trabajo nº 9219

BANCO DE ESPAÑA

TRATAMIENTO DE PREDICCIONES CONFLICTIVAS:
EMPLEO EFICIENTE
DE INFORMACION EXTRAMUESTRAL

Luis Julián Alvarez, Juan Carlos Delrieu y Javier Jareño (*)

(*) Los autores agradecen los comentarios y sugerencias realizados por Carlos Ballabriga, Juan José Dolado, Esther Gordo, Daniel Peña y Teresa Sastre. También ha resultado de gran utilidad la discusión realizada en un seminario del Banco de España. Obviamente, los errores que puedan subsistir son sólo responsabilidad nuestra.

El Banco de España al publicar esta serie pretende facilitar la difusión de estudios de interés que contribuyan al mejor conocimiento de la economía española.

Los análisis, opiniones y conclusiones de estas investigaciones representan las ideas de los autores, con las que no necesariamente coincide el Banco de España.

ISBN: 84-7793-172-0

Depósito legal: M-23104-1992

Imprenta del Banco de España

**TRATAMIENTO DE PREDICCIONES CONFLICTIVAS:
EMPLEO EFICIENTE DE INFORMACIÓN EXTRAMUESTRAL**
RESUMEN

La finalidad de este trabajo es la de incorporar, de manera eficiente, a un modelo ARIMA univariante la información contenida en las predicciones alternativas que se obtienen a partir de la opinión de un experto o de un modelo econométrico. El objetivo es el de conjugar las propiedades a corto plazo de los modelos ARIMA con la senda de largo plazo, proporcionada, fundamentalmente, por los modelos econométricos.

Se contempla cualquier conjunto de restricciones lineales sobre la evolución futura de la serie y se permite la introducción de incertidumbre sobre éstas. El problema se resuelve al obtener la "predicción restringida" por mínimos cuadrados generalizados (MCG).

Palabras clave: información extramuestral, modelos ARIMA, predicción restringida.

1. INTRODUCCIÓN Y CONCLUSIONES

En la obtención de predicciones sobre la evolución futura de los acontecimientos económicos, los modelos estadístico-econométricos desempeñan un papel destacado. Sin embargo, en numerosas ocasiones, distintas organizaciones, al formular su previsión final, emplean información adicional que los modelos disponibles no consideran. Esta información, que suele proceder de numerosas fuentes de carácter diverso, carece de un patrón sistemático o se recibe con una frecuencia distinta de la del modelo.

Por otro lado, los modelos univariantes de series temporales gozan de una elevada popularidad en la práctica predictiva, debida a su éxito en captar la estructura dinámica de los datos. En este contexto, la pregunta que surge de manera natural es si resulta posible incorporar a un modelo de este tipo la información que considera un experto o un modelo econométrico, para poder así disponer de previsiones más precisas. Debe entenderse que tales previsiones se encuentran condicionadas a la validez de la información que se incorpora.

El objetivo de este trabajo es el de resolver, de manera eficiente, el problema de incorporación de información extramuestral a un modelo univariante, obteniéndose lo que denominamos predicciones restringidas. Se distinguen en todo momento los casos de restricciones ciertas y de restricciones con un determinado grado de incertidumbre, y el método resultante ofrece varias ventajas. Primero: se demuestra que la solución es diferente según el modelo ARIMA que caracterice el fenómeno, es decir, este método permite que los resultados se adapten a las peculiaridades de cada serie. Segundo: permite calcular los intervalos de confianza de las predicciones restringidas, a diferencia de

lo que sucedería con cualquier otro procedimiento empírico, como, por ejemplo, con la realización de un reparto lineal. Tercero: se ofrece un estadístico que permite contrastar la compatibilidad de la información que se pretende incorporar, con la evolución pasada de la serie. Finalmente, se examina la relación existente entre el estimador propuesto y la estimación de valores ausentes ("missing values").

La estructura del trabajo, tras este epígrafe, es la siguiente: la sección 2 ofrece el marco conceptual, destacando las diferencias más relevantes entre la literatura sobre combinación de predicciones y el procedimiento que se propone. La sección 3 recoge el marco analítico que se emplea cuando se desea introducir restricciones con un cierto grado de incertidumbre, derivando, asimismo, la solución cuando las restricciones son ciertas. En la sección 4, se destaca la relación con la literatura de estimación de valores ausentes. Las secciones 5 y 6 recogen dos aplicaciones referidas a la trimestralización de las importaciones no energéticas y al índice de precios al consumo de la economía española, respectivamente. Por último, se ofrece un apéndice en el que se demuestran diversos resultados contenidos en el texto.

2. MARCO CONCEPTUAL

El hecho de que las predicciones de un modelo no sean satisfactorias -y, por tanto, puedan ser mejoradas- es un indicio de no incorporación de toda la información relevante o de mala especificación del modelo. En este último caso, la preocupación del económetra debe consistir en buscar las especificaciones más adecuadas posible, ya que,

una vez recogido el proceso generador de datos, las predicciones fiables y precisas surgen de forma natural.

Sin embargo, en la práctica, es muy frecuente que no sea posible combinar conjuntos de información de modo eficiente, o que, a la hora de predecir empleando un modelo econométrico, se desconozcan los valores de las variables explicativas, y haya que emplear predicciones de éstas. Lógicamente, en este caso, la calidad de la predicción econométrica se deteriora y puede llegar a ser peor que la univariante: en particular, si estamos interesados en conocer la dinámica a corto plazo.

En este sentido, un empeño que no parece estéril es el de conjugar los resultados que pueden derivarse de un modelo que recoja con bastante precisión la estructura dinámica a corto plazo, con las propiedades que se derivan de modelos econométricos o la propia opinión de expertos para horizontes más dilatados.

Ahora bien: la capacidad de incorporar la información relevante para la predicción se encuentra directamente relacionada con el instrumental estadístico disponible para el estudio del fenómeno en cuestión. El cuadro 1 muestra el contexto donde se enmarca el objeto de nuestro estudio: la predicción restringida. En el cuadro se señala la diferente información que utilizan los distintos métodos de previsión, así como su diferente forma de proceder y resultados. Por último, indica cómo estos resultados pueden armonizarse, bien con la metodología existente sobre combinación de predicciones, bien con la propuesta que se realiza en este artículo.

CUADRO 1

INFORMACION EXTRAMUESTRAL

INFORMACION MUESTRAL

UNIVERSO UNIVARIANTE UNIVERSO MULTIVARIANTE

NIVEL I: INFORMACION DISPONIBLE

INFORMACION EXTRAMUESTRAL

NIVEL II: MODELIZACION

MODELO NO EXPLICATIVO

NIVEL III: PREDICCION

OPINION DE EXPERTO

RESTRICCIONES LINEALES

PREDICCION RESTRINGIDA

PREDICCION COMBINADA

NIVEL IV: ALTERNATIVAS

El universo univariante se caracteriza esencialmente porque la observación temporal de un fenómeno económico recoge implícitamente el efecto de las variables que lo causan. De esta forma, un análisis basado exclusivamente en la variable objeto de estudio no se encuentra excesivamente limitado por no considerar la información que ofrecen sus variables explicativas, ya que esta información se encuentra recogida en la propia serie que se estudia.

El tratamiento de esta información se realiza mediante los modelos univariantes, y en especial por los modelos ARIMA en los que centramos nuestro interés. Como resultado de la aplicación de estos modelos, se obtiene la predicción univariante, entre cuyas desventajas se encuentra la predicción en momentos de fuertes cambios, siendo su principal cualidad la predicción a corto plazo, debido a su gran capacidad para recoger la dinámica de la variable estudiada.

El universo multivariante contempla de forma explícita la información que aportan las variables causales del fenómeno de interés. De este modo, y frente al caso univariante, la información se recoge directamente, por lo que los resultados que se obtienen, además de ser más eficientes, poseen mayor poder explicativo.

Los modelos utilizados para el uso de esta información son los modelos econométricos, los cuales explicitan las relaciones existentes entre la variable objeto de estudio y las variables que lo explican. En estos modelos, cuando se desea realizar predicciones, el desconocimiento de los valores de las variables explicativas en el futuro determina la necesidad de utilizar predicciones para éstas, lo cual deteriora la calidad de la predicción econométrica, particularmente en

el corto plazo, en el que se manifiestan superiores los modelos univariantes.

Hasta ahora, hemos considerado formas de tratamiento de la información que se obtiene de modo sistemático. Ahora bien: muchas veces se genera información de carácter esporádico, no regular en el tiempo por su naturaleza o por su fuente, y que, sin embargo, resulta de gran relevancia a la hora de predecir el futuro. Así, entendemos por información extramuestral la que no se presenta sistemáticamente en el tiempo y con alto poder informativo. Ejemplos de este tipo de información, son el anuncio de políticas económicas de choque, el anuncio de objetivos económicos, los cambios legislativos, etc.

La naturaleza de esta información no permite su análisis mediante modelos estadísticos, por lo que únicamente se trata a través del filtro subjetivo de un experto, sobre la base de su conocimiento y de su experiencia. De esta forma, se obtendrá su opinión, que a diferencia de las predicciones anteriores, sí incorpora la información extramuestral.

En definitiva, la situación en la que nos encontramos se distingue por tres tipos de predicciones alternativas con diferentes características: a) predicción univariante, con buenas características a corto plazo, b) predicción econométrica, con buenas características a largo plazo, y c) opinión de experto, cuya mayor virtud es la de incorporar información extramuestral¹.

¹ No se pretende afirmar que los expertos sean infalibles. De hecho, las previsiones de éstos presentan, en ocasiones, errores considerables. Por esta razón, cuando intervienen predicciones subjetivas, se hace especialmente importante el seguimiento de los errores de predicción (véase Jenkins (1982)).

Dada la dificultad para combinar estos conjuntos de información de un modo eficiente, la solución alternativa debe consistir en conjugar las propiedades de las diferentes modelizaciones sobre el futuro.

En esta línea, existe una abundante literatura sobre combinación de predicciones, que renuncia expresamente a la combinación de conjuntos de información, tratando únicamente de conseguir previsiones más precisas (véase, entre otros, Bates y Granger (1969), Newbold y Granger (1974), Granger y Ramanathan (1984), así como la revisión de Clemen (1989)). Las bases de las mejoras que se obtienen son: a) una predicción puede tener en cuenta informaciones que otras no tienen, y b) las predicciones pueden tener distintos supuestos de partida. El resultado final proporciona la predicción óptima como combinación lineal de predicciones alternativas, sin considerar explicitamente el problema de cuál de éstas es la más adecuada².

Aunque la casi totalidad de la literatura se ha dedicado a la combinación de predicciones con modelos de igual periodicidad, recientemente ha aparecido una serie de trabajos basados en la combinación de predicciones con distinta periodicidad, tanto a fin de obtener predicciones para el mayor período (véase Corrado y Greene (1987), Corrado y Haltmaier (1987) y Howrey, Hymans y Donihue (1991)) como para el período menor (Fuhrer y Haltmaier (1989)).

² En realidad, la especificación de las ponderaciones en la combinación lineal se relaciona directamente con la desviación típica de cada predicción, y, por tanto, la predicción resultante se acercará más a la de menor varianza.

Sin embargo, la aplicación de la metodología de combinación de predicciones no es siempre posible, especialmente si nos encontramos con predicciones no sistemáticas. Por este motivo, tiene interés extender los resultados de esta literatura para cubrir nuevas posibilidades, de forma que se obtengan predictores de carácter más amplio que permitan combinar predicciones sistemáticas y no sistemáticas.

Por otro lado, con frecuencia es interesante por si mismo disponer de predicciones que satisfagan determinadas restricciones, ya que esto permite tanto evaluar objetivos como efectuar su seguimiento. En este contexto, el problema que se plantea es cómo incorporar información extramuestral a un modelo cuantitativo, y la solución que se propone, para el caso de un modelo ARIMA univariante, es la predicción restringida, que supone una revisión de las previsiones univariantes, de modo que se satisfaga la información aportada por un modelo econométrico o por un experto, consiguiendo predicciones de carácter eficiente³, en el sentido de minimizar el error de predicción. Este problema ha sido tratado, empleando diferentes aproximaciones, en los trabajos de Cholette (1982), Guerrero (1989), y Trabelsi y Hillmer (1989). Aunque en este último se establece el marco más general, se demuestra que las tres soluciones son equivalentes en determinadas condiciones. Asimismo, Pankratz (1989) extiende los resultados al caso de un modelo VARMA.

³ En general, los ejercicios realizados hasta la fecha para introducir este tipo de información en las previsiones se limitan a establecer un reparto lineal, ponderado o no, de la diferencia existente entre la predicción univariante y la previsión del experto, sin respetar, de manera eficiente, la dinámica del fenómeno.

Por otro lado, la metodología propuesta permite conjugar predicciones econométricas y univariantes, de forma que se intenta aprovechar las cualidades de los modelos univariantes a corto plazo con las de los multivariantes a largo plazo, presentando, en este caso, gran similitud con la literatura de combinación de predicciones.

3. EL MARCO ANALITICO

3.1 Marco estadistico

Supongamos una serie Z_t que se puede representar de manera adecuada por un modelo ARIMA univariante

$$\phi^*(L)Z_t = \Theta(L)a_t \quad (1)$$

donde $\Theta(L) = (1 - \Theta_1L - \dots - \Theta_q L^q)$ y $\phi^*(L) = (1 - \phi_1L - \dots - \phi_p L^p)$ son operadores polinómicos en el operador de retardos L , de modo que $LZ_t \equiv Z_{t-1}$. Ambos polinomios no presentan factores comunes, y el polinomio de medias móviles tiene sus raíces fuera del círculo unidad, por lo que el proceso es invertible. Por su parte, el operador autorregresivo puede presentar raíces en el círculo unidad. Además, supondremos que la transformación estacionaria de la serie tiene media cero y que a_t es un proceso de ruido blanco formado por variables aleatorias normales no correlacionadas y con varianza constante

$$a_t \sim \text{iid } N(0, \sigma_a^2) \quad (2)$$

El proceso puede escribirse también en forma de media móvil como

$$Z_t = \frac{\Theta(L)}{\phi^*(L)} a_t = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i a_{t-i} \quad (3)$$

donde $\Psi_0 = 1$ y el resto de los coeficientes se pueden obtener si igualamos coeficientes en

$$\phi^*(L) \Psi(L) = \Theta(L) \quad (4)$$

A partir de los coeficientes Ψ_i y las innovaciones pasadas a_{t-1} , se pueden obtener de manera inmediata predicciones h periodos por delante, que únicamente consideran la información contenida en el pasado histórico de la serie $\Omega_z = \{Z_t, Z_{t-1}, \dots\}$. Box y Jenkins (1970) demuestran que el predictor óptimo, en el sentido que minimiza el error cuadrático medio, viene dado por

$$\hat{Z}_t(h) = E[Z_{t+h} | \Omega_z] = \Psi_h a_t + \Psi_{h+1} a_{t-1} + \Psi_{h+2} a_{t-2} + \dots \quad (5)$$

Además, es posible descomponer la serie en una parte sistemática (la previsión) y otra no sistemática (el error), siendo ambas ortogonales entre si

(6)

$$Z_{t+h} = \hat{Z}_t(h) + e_t(h)$$

donde $\hat{Z}_t(h)$ denota el predictor óptimo para h periodos por delante, y $e_t(h)$, el error de predicción h periodos por delante. Por otro lado, este error de predicción h periodos por delante se puede expresar como una combinación lineal de innovaciones futuras

$$e_t(h) = a_{t+h} + \Psi_1 a_{t+h-1} + \dots + \Psi_{h-1} a_{t+1}$$

(7)

$$= \sum_{i=0}^{h-1} \Psi_i a_{t+h-i}$$

Matricialmente, la ecuación (7) se expresa como

$$e = \Psi a \quad (8)$$

donde a es un vector columna $a = (a_{t+1} \dots a_{t+h})'$ y Ψ es una matriz cuadrada de dimensión $h \times h$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \Psi_1 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \Psi_{h-1} & \Psi_{h-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

y, se demuestra que los errores de previsión h períodos por delante tienen media nula y matriz de varianzas y covarianzas:

$$E[ee'] = \sigma_a^2 \Psi \Psi' \quad (10)$$

Por otro lado, la descomposición en parte sistemática y no sistemática se puede escribir de forma más compacta como

$$Z = Z + e \quad (11)$$

donde Z , Z , y e son vectores columna de dimensión h , tales que

$$Z = [Z_{t+1} \dots Z_{t+h}]', \hat{Z} = [\hat{Z}_t(1) \dots \hat{Z}_t(h)]' \text{ y} \quad (12)$$

$$e = [e_t(1) \dots e_t(h)]'$$

Por tanto, empleando (8) y (11) se tiene que

$$Z = \hat{Z} + \Psi a \quad (13)$$

A partir de consideraciones similares, Guerrero (1989) resuelve el problema planteando un programa de optimización en el que se desea minimizar el error cuadrático medio de la predicción sujeto a que se satisfagan las restricciones impuestas por un experto. Nosotros proponemos un enfoque diferente, basado en ideas desarrolladas por

Durbin (1953) y Theil y Goldberger (1961)⁴, que permite, considerando el caso más general posible, obtener la solución de forma sencilla. A ello dedicamos la siguiente sección.

3.2 Modelos ARIMA univariantes e incorporación de información adicional⁵

Las restricciones pueden ser aproximadas o estocásticas, bien porque se emplee un modelo econométrico para derivarlas, con lo cual es posible calcular la matriz de varianzas y covarianzas de los errores de previsión asociados a estas restricciones, bien porque se disponga de información sobre la precisión de la fuente. Obsérvese que la primera situación es interesante, ya que es frecuente disponer de modelos econométricos con datos anuales o trimestrales, y, al mismo tiempo, contar con modelos univariantes con una frecuencia mayor (por ejemplo, mensuales o diarios).

De esta manera, el problema consiste en encontrar el predictor óptimo que satisfaga las restricciones estocásticas recogidas como

$$A Z = b + u \quad (14)$$

⁴ Estos autores demuestran de qué manera se ve afectada la estimación de los parámetros de un modelo de regresión cuando se incorpora información extramuestral.

⁵ En este epígrafe se supone que las predicciones se obtienen con un modelo ARIMA. Sin embargo, en general, podemos especificar la matriz de varianzas y covarianzas de los errores h períodos por delante, y el desarrollo sería igualmente válido, por ejemplo, para modelos econométricos uniecuacionales.

donde u es un vector de r variables aleatorias distribuidas normalmente con media cero y, en general, varianzas diferentes; la matriz A es de dimensión $r \times h$ con $r \leq h$ y rango r , siendo r el número de restricciones, Z es un vector $h \times 1$ que recoge los valores futuros de la variable y b es un vector de constantes de dimensión $r \times 1$. La forma general recoge como casos particulares las siguientes posibilidades, y en cualquiera de ellas se impone la restricción con un cierto margen de variabilidad proporcionada por la varianza del término de error:

1. Restricciones aisladas. Se posee información sobre el valor que tomará el fenómeno en un momento del tiempo futuro

$$Z_{t+1} = b_0 + u_0 \quad (15)$$

2. Restricciones de suma o media. Se estima el valor de la media o la suma de un cierto número de valores: por ejemplo, 12

$$Z_{t+1} + Z_{t+2} + Z_{t+3} + \dots + Z_{t+12} = b_1 + u_1 \quad (16)$$

3. Restricciones de incremento. Se dispone de información referida al incremento que registra una variable en un intervalo de tiempo

$$Z_{t+i} - Z_{t+j} = b_2 + u_2 \quad (17)$$

Así, es posible que se satisfagan de manera conjunta distintas restricciones y que cada una de ellas tenga una varianza distinta. Además, en general, permitiremos que exista correlación entre éstas y las previsiones del modelo ARIMA, y supondremos que

$$u_i \sim N(0, \sigma_i^2) \quad (18)$$

$$E[u_i u_j] = \sigma_{ij}$$

Así, pues, la información existente se puede resumir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Z &= \hat{Z} + e \\ AZ &= b + u \end{aligned} \quad (19)$$

donde, en general,

$$\begin{pmatrix} e \\ u \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_e^2 \Psi \Psi' & \Sigma_{eu} \\ \Sigma_{ue} & \Sigma_u \end{pmatrix} \right) \quad (20)$$

siendo Σ_u la matriz de varianzas y covarianzas de las perturbaciones asociadas a las restricciones, Σ_{eu} es la matriz de covarianzas entre errores de predicción h períodos por delante y perturbaciones asociadas a las restricciones y $\Sigma_{ue} = \Sigma_{eu}'$.

El problema de encontrar un estimador que satisfaga la restricción estocástica teniendo en cuenta las propiedades de los términos de error se contempla con mayor claridad si escribimos la expresión (19) en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \hat{Z} \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ A \end{bmatrix} Z + \begin{bmatrix} -e \\ -u \end{bmatrix} \quad (21)$$

Ahora, el problema queda resuelto si consideramos que buscamos el estimador por mínimos cuadrados generalizados (MCG), en la misma linea con las propuestas de Durbin (1953) y Theil y Goldberger (1961). Entonces, el estimador óptimo es:

$$Z^* = \left([I|A'] \begin{pmatrix} \sigma_a^2 \Psi \Psi & \sum_{eu} \\ \sum_{ue} & \sum_u \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I \\ A \end{pmatrix} \right)^{-1} \left([I|A'] \begin{pmatrix} \sigma_a^2 \Psi \Psi' & \sum_{eu} \\ \sum_{ue} & \sum_u \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{Z} \\ b \end{pmatrix} \right) \quad (22)$$

Sin embargo, en la práctica, tiene especial relevancia considerar el caso particular donde $\Sigma_{eu} = 0$, ya que, en ocasiones, puede no resultar excesivamente sencillo especificar estas matrices de covarianzas entre errores. Por otro lado, en numerosos casos, las fuentes de información pueden ser suficientemente independientes para juzgar que este supuesto no es especialmente restrictivo. Parece, pues, de interés considerar con más detalle este caso particular. Así, se demuestra en el apéndice que, cuando no hay correlación entre las perturbaciones de las restricciones y las perturbaciones del modelo ARIMA, el predictor óptimo Z^* vendrá dado por

$$\begin{aligned}
 Z^* &= \hat{Z} + (\sigma_a^2 \Psi \Psi') A' [A (\sigma_a^2 \Psi \Psi') A' + \Sigma_u]^{-1} (b - A \hat{Z}) = \\
 &= \hat{Z} + P^* (b - A \hat{Z})
 \end{aligned} \tag{23}$$

donde

$$P^* = (\sigma_a^2 \Psi \Psi') A' [A (\sigma_a^2 \Psi \Psi') A' + \Sigma_u]^{-1} \tag{24}$$

Esta expresión resulta más interpretable que la anterior y nos indica que el predictor óptimo es una combinación lineal del predictor ARIMA libre y la información nueva que contienen las restricciones⁶. El término Σ_u refleja la precisión asociada a las diferentes restricciones. Así, para una divergencia dada entre la predicción ARIMA y el vector de restricciones, las revisiones serán tanto mayores cuanto menor sea la varianza asociada a esta restricción. En el caso opuesto, si una restricción es muy poco precisa, el predictor óptimo no diferirá prácticamente de la previsión ARIMA.

Ahora bien: muchas veces, se genera información de carácter esporádico, no regular en el tiempo, bien por su naturaleza o por su fuente, pero que resulta de gran importancia a la hora de hacer predicciones. La peculiaridad de este tipo de información extramuestral

⁶ Obsérvese, que si $A = I$, se obtiene la fórmula (bayesiana) estándar de combinación de información ponderada por la precisión relativa.

puede, a veces, llevarnos a considerarla como cierta⁷. En estos casos, es fácil derivar de la expresión (23) cuál sería la predicción sujeta a la restricción, sin más que anular el término Σ_u . Es decir,

$$Z^{**} = \hat{Z} + P^{**}(b - A\hat{Z}) \quad (25)$$

donde Z^{**} es el predictor óptimo que satisface nuestro problema de optimización, \hat{Z} es la predicción del modelo ARIMA sin restricción alguna y P^{**} es una matriz de ponderación de dimensión $h \times r$, que viene dada por:

$$P^{**} = (\Psi \Psi') A' [A(\Psi \Psi') A']^{-1} \quad (26)$$

La ecuación (25), que es la que se deriva en Guerrero (1989), nos da una solución fácilmente interpretable, donde el predictor restringido óptimo se obtiene como una combinación lineal de la predicción ARIMA y la diferencia entre el vector de restricciones y el predictor óptimo univariante de la restricción ($A\hat{Z}$). Como antes, el término $(b - A\hat{Z})$ refleja la información nueva que introducimos en la predicción, con una importancia relativa medida por la matriz P^{**} .

En cualquier caso, la expresión a la que se llega pone de manifiesto que el estimador restringido óptimo será diferente según la

⁷ Puede ser interesante emplear la hipótesis de que la información extramuestral es cierta para evaluar objetivos. Véase la aplicación referida al IPC.

estructura dinámica que caracterice a los datos, y, por tanto, del modelo ARIMA que genere el proceso estudiado. Evidentemente, los predictores restringidos Z^* y Z^{**} satisfacen las restricciones de forma estocástica o exacta, respectivamente.

Por otro lado, puesto que el predictor óptimo se puede obtener como un estimador por mínimos cuadrados generalizados (MCG), la expresión de la matriz de varianzas de los errores del estimador de la expresión (22) resulta ser

$$\text{Var}(Z^* - Z) = \left([I \mid A'] \begin{bmatrix} \sigma_a^2 \Psi \Psi' & \Sigma_{eu} \\ \Sigma_{ue} & \Sigma_u \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I \\ A \end{pmatrix} \right)^{-1} \quad (27)$$

y puede verse en el apéndice que, en el caso en que $\Sigma_{eu} = 0$, la expresión anterior se transforma en esta otra:

$$\text{Var}(Z^* - Z) = \sigma_a^2 \Psi \Psi' (I - PA)' + P \Sigma_u P' \quad (28)$$

Si, además, consideramos que las restricciones no llevan asociada incertidumbre alguna, obtenemos que

$$\text{Var}(Z^{**} - Z) = \sigma_a^2 \Psi \Psi' (I - PA)' \quad (29)$$

Dado que la matriz de diferencias entre matrices de varianzas del error de predicción libre y restringido es semidefinida positiva, se obtiene, de manera inmediata, que la varianza del error de predicción de cualquier combinación lineal de predicciones restringidas es inferior a la de esa misma combinación lineal de previsiones ARIMA. Este resultado es el intuitivamente esperado, ya que la introducción de información supuestamente correcta sobre la evolución futura del fenómeno disminuye nuestro grado de incertidumbre respecto del que teníamos antes de disponer de esta información.

Al mismo tiempo, cuando las restricciones son estocásticas, y, por tanto, su cumplimiento es incierto, la matriz de varianzas es mayor que cuando las restricciones se satisfacen con igualdad. En concreto: si las restricciones estocásticas tienen una varianza elevada, son poco informativas y disminuyen en menor medida nuestra incertidumbre.

3.3 Un contraste de compatibilidad

Un supuesto implícito que empleábamos en la derivación del estimador restringido óptimo consistía en que la restricción es compatible con la evolución que había mostrado el fenómeno históricamente. Por ello, en este epígrafe exponemos un contraste de compatibilidad que nos permita detectar qué restricciones son incompatibles con el pasado de la serie. Este contraste es importante, ya que, si se rechaza, se está suponiendo implícitamente que se va a producir un cambio estructural. Si este fuera el caso, los resultados

habrían de tomarse con las debidas cautelas, pues se obtienen bajo el supuesto de estabilidad.

En el apéndice se demuestra que, en la hipótesis nula de satisfacción de las restricciones, el estadístico obtenido, en línea con los propuestos por Box y Tiao (1976) y Lütkepohl (1988), es, en el caso de que la covarianza entre los errores de predicción y las perturbaciones asociadas a las restricciones sea nula,

$$Q = (b - A\hat{Z})' [\sigma_a^2 A \Psi \Psi' A' + \Sigma_u]^{-1} (b - A\hat{Z}) \quad (30)$$

que se distribuye como una χ^2 con r grados de libertad, siendo r el número de restricciones. En la práctica, sin embargo, σ_a^2 , Ψ y Σ_u son desconocidos, por lo que habrá que sustituirlos por sus estimadores eficientes para obtener un estadístico factible.

4. LA RELACIÓN ENTRE EL PREDICTOR RESTRINGIDO PROPUESTO Y LA ESTIMACIÓN DE VALORES AUSENTES

Un problema que se presenta con frecuencia en la práctica es que se dispone de series incompletas porque faltan datos en algunos períodos (aislados o en grupos), porque cambia la frecuencia de la observación, o porque alguna de las observaciones es claramente errónea. Aunque la literatura estadística se ha ocupado del tema (véase Brubacher y Tunnicliffe Wilson (1976), Peña y Maravall (1991) y las referencias allí citadas), el objetivo de este epígrafe es el de mostrar que el estimador propuesto para realizar predicciones con restricciones

puede emplearse para efectuar interpolación óptima, presentando el atractivo de poder abordar el problema mediante un enfoque alternativo.

Que esto es así resulta extremadamente claro. En general, el estimador con error cuadrático medio mínimo de las observaciones ausentes es la esperanza condicionada a las observaciones que se poseen. Si denotamos la serie observada $Z_{(m)}$ como la serie con k valores ausentes en los períodos $t+1, t+m_1, t+m_2, \dots, t+m_{k-1}$ donde m_1, \dots, m_{k-1} son enteros positivos, el estimador óptimo de los k valores ausentes viene dado por

$$E [Z_m | Z_{(m)}] \quad (31)$$

donde Z_m recoge los valores de la serie en $t+1, t+m_1, \dots, t+m_{k-1}$. Para comprobar que el estimador propuesto coincide con este último, basta con observar que siempre es posible situarse en el momento inmediatamente anterior a la primera observación ausente y realizar las predicciones necesarias para alcanzar el final de la serie. Se plantea entonces la pregunta de qué restricciones son necesarias para que ambos estimadores coincidan. La respuesta consiste en imponer que las predicciones coincidan con los valores conocidos a partir del primer valor ausente. Puesto que, en ambos casos, el conjunto de información es el mismo, el estimador de mínima varianza es idéntico al propuesto.

Para ver la coincidencia del estimador propuesto y el empleado habitualmente en la literatura, utilizaremos como ejemplo un

proceso AR(1) en el que la penúltima observación se desconoce⁸. En este caso, el estimador óptimo de la observación ausente viene dado por

$$\hat{Z}_m = \frac{\phi}{1+\phi^2} (Z_{m-1} + Z_{m+1}) \quad (32)$$

A partir de la expresión del predictor restringido (25), particularizando para un proceso AR(1) con un horizonte de predicción de dos períodos,

la matriz de varianzas y covarianzas será $\sigma_a^2 \Psi \Psi' = \sigma_a^2 \begin{bmatrix} 1 & \phi \\ \phi & 1+\phi^2 \end{bmatrix}$.

En este caso, empleando la misma notación que en apartados anteriores, $b = Z_{m+1}$ y $A = [0 \ 1]$.

Además, $\hat{Z}(1) = \phi Z_{m-1}$ y $\hat{Z}(2) = \phi^2 Z_{m-1}$

Por lo que, particularizando en (25),

⁸ La demostración de este resultado para un modelo ARIMA general, puede verse en Alvarez, Delrieu y Jareño (1992).

$$\begin{aligned}
 Z^{**} &= \begin{bmatrix} \phi & Z_{m-1} \\ \phi^2 & Z_{m-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi \\ 1+\phi^2 \end{bmatrix} \frac{Z_{m+1} + \phi^2 Z_{m-1}}{1+\phi^2} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\phi}{1+\phi^2} & (Z_{m+1} + Z_{m-1}) \\ Z_{m+1} & \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{33}$$

de forma que se obtiene el mismo estimador que en (32)

5. TRIMESTRALIZACION DE LAS IMPORTACIONES NO ENERGETICAS: UNA APLICACION

La realización de ejercicios de trimestralización de las principales variables de la economía española, a partir de las cifras anuales de la Contabilidad Nacional, tiene como fin estimar el perfil trimestral de estas variables hasta el presente, así como disponer de previsiones sobre su comportamiento trimestral en los próximos años. Para esta finalidad, un esquema de trabajo seguido habitualmente es:

- a) Buscar un indicador que refleje con suficiente bondad el comportamiento de la variable que se ha de trimestralizar.
- b) Ampliar con predicciones, en general de modelos ARIMA univariantes, la serie histórica del indicador.
- c) Emplear algún procedimiento de extracción de señales sobre el indicador.

- d) Ampliar con previsiones la variable macroeconómica que se desea trimestralizar. En muchos casos, esta previsión es similar a la proporcionada por el modelo ARIMA para la variable indicada.
- e) Aplicar algún procedimiento de interpolación y distribución.

Como puede apreciarse, los modelos univariantes desempeñan, en este esquema, un papel importante. Esta clase de modelos cuenta con funciones de predicción adaptativas, por lo que normalmente presentan predicciones ajustadas a la realidad. Sin embargo, una elevada proporción de series económicas del sector real de nuestra economía, tras un período de fuerte crecimiento a partir de mediados de 1985, se vió afectada por la adopción de diversas medidas restrictivas de política económica y, en particular, por la limitación del crédito al sector privado durante el verano de 1989. Su consecuencia fue un cambio en la evolución de las tasas de crecimiento de estas variables, manifestándose la presencia de un punto de ruptura⁹ que originó, como resultado más inmediato, sesgos sistemáticos al alza en las predicciones de los modelos cuantitativos.

Particularizando en los modelos ARIMA univariantes, a pesar de mantener su idoneidad para recoger la dinámica a corto plazo y, en especial, la estacionalidad, proporcionaban, en general, unas predicciones que contrastaban notablemente con la información derivada

⁹ Véase Espasa, Delrieu y Alvarez (1992) para un estudio de las importaciones no energéticas. Por otro lado, Sebastián (1991) encuentra significativo un cambio en la elasticidad en la demanda de importaciones respecto del PIB.

de otras variables o con la opinión de los expertos. En definitiva, la situación resultante se caracterizaba por la presencia de predicciones no sólo alternativas, sino claramente opuestas.

De acuerdo con este contexto, en este apartado tratamos de formular puntuaciones sobre los diferentes resultados que se habrían obtenido en la trimestralización de una de las variables macroeconómicas más relevantes de nuestra economía -las importaciones no energéticas a precios corrientes-, si hubiéramos conjugado las propiedades de los modelos ARIMA con las propiedades de los modelos econométricos o con la opinión de expertos para horizontes temporales más dilatados.

El ejercicio que presentamos se ciñe al periodo 1990-1991, suponiendo que la información cuantitativa disponible sólo alcanza hasta junio de 1990. Esta aplicación resulta interesante, ya que:

- 1.- En primer lugar, en aquella fecha, los modelos univariantes disponían de poca información sobre el cambio sufrido en el sistema, lo que provocaba que las predicciones resultantes estuvieran sistemáticamente sesgadas al alza (véase en los gráficos 1 y 1 bis la racha de residuos negativos a partir del segundo semestre de 1989).
- 2.- Además, existían modelos cuantitativos alternativos Sebastián (1991), que parecían recoger de manera más adecuada la desaceleración de nuestras compras de bienes al exterior, lo que daba lugar a ciertas discrepancias con los modelos univariantes.

Gráfico 1

IMPORTACIONES TOTALES NO ENERGETICAS

Residuos

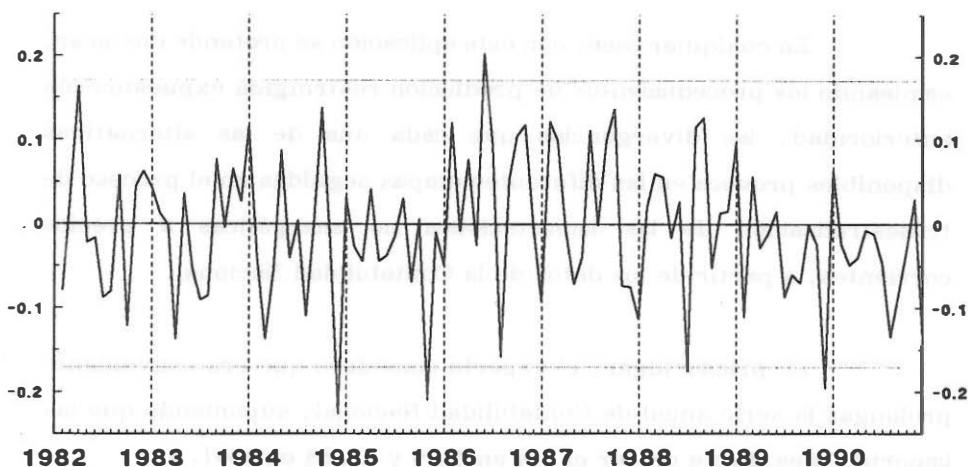
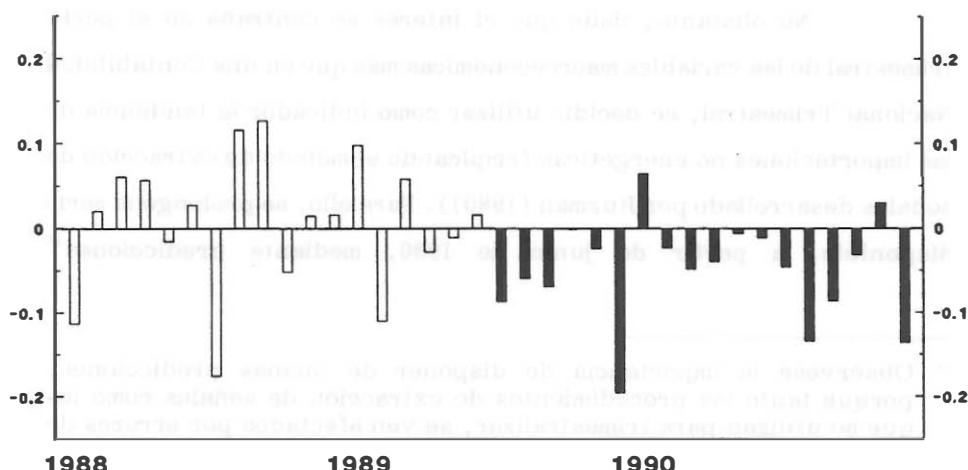


Gráfico 1 bis

IMPORTACIONES TOTALES NO ENERGETICAS

Residuos



Estas divergencias, por otro lado, venían ratificadas por analistas del sector exterior.

En cualquier caso, con esta aplicación se pretende destacar, empleando los procedimientos de predicción restringida expuestos con anterioridad, las divergencias que cada una de las alternativas disponibles provoca en las diferentes etapas seguidas en el proceso de trimestralización de las importaciones no energéticas a precios corrientes, a partir de los datos de la Contabilidad Nacional.

En primer lugar, el experto consideró que era conveniente prolongar la serie anual de Contabilidad Nacional, suponiendo que las importaciones iban a crecer el 13% en 1990 y el 15% en 1991.

Por otro lado, se decidió emplear la serie de importaciones no energéticas elaborada por la Dirección General de Aduanas, como indicador de la serie de Contabilidad Nacional porque los criterios contables que definen ambas estadísticas son prácticamente idénticos.

No obstante, dado que el interés se centraba en el perfil trimestral de las variables macroeconómicas más que en una Contabilidad Nacional Trimestral, se decidió utilizar como indicador la tendencia de las importaciones no energéticas (empleando el método de extracción de señales desarrollado por Burman (1980)). Para ello, se prolongó la serie disponible, a partir de junio de 1990, mediante predicciones¹⁰

¹⁰ Obsérvese la importancia de disponer de buenas predicciones, porque tanto los procedimientos de extracción de señales como los que se utilizan para trimestralizar, se ven afectados por errores de revisión que es conveniente minimizar.

mensuales proporcionadas por un modelo ARIMA univariante, que daban lugar a un crecimiento medio del 13% para 1990 y del 18,1% para 1991.

Con esta información se procedió a trimestralizar las importaciones no energéticas a precios corrientes. Sin embargo, si hubiésemos podido aplicar el procedimiento propuesto de predicción restringida, se habría dispuesto de otras alternativas que en su momento no se consideraron porque tenían, o bien un carácter esporádico (la opinión de experto), o bien una periodicidad diferente (los modelos econométricos anuales de Sebastián (1991)), lo que impedía, en cualquier caso, disponer de un indicador trimestral con unos crecimientos medios para el conjunto del año, más razonables que los proporcionados por el modelo ARIMA. El cuadro 2 recoge estas posibilidades, que se comentan a continuación.

Así, la línea ARI recoge los crecimientos medios que se obtenían al utilizar el modelo univariante sin imponer ningún tipo de restricción. Seguidamente, los crecimientos recogidos por BON expresan la previsión del experto, que incluía información extramuestral no considerada por los modelos disponibles en aquel momento. Las dos líneas siguientes recogen los crecimientos medios que resultan al realizar una simulación dinámica desde 1989, con el modelo econométrico de Sebastián (1991), suponiendo, en el primer caso, que la elasticidad demanda-renta permanece constante, MSS, y, en el segundo, MSC, admitiendo que esta elasticidad se modificó. Por último, con la línea OBS se pretende analizar cuál habría sido la senda mensual de las importaciones no energéticas si restringiéramos las predicciones

Cuadro 2

IMPORTACIONES NO ENERGÉTICAS A PRECIOS CORRIENTES				
Fecha de la predicción: Junio 1990				
Fuente de la predicción	Nomenclatura	PREDICCIÓN		
		1990	1991	
Modelo ARIMA				
	ARI	13,0%	18,1%	
Experto				
	BON	13,0%	15,0%	
Simulación dinámica modelo econométrico¹:				
Sebastián (1991), sin cambios en ϵ_y	MSS	3,8%	3,7%	
Sebastián (1991), con cambios en ϵ_y	MSC	7,9%	6,2%	
Crecimiento medio observado	OBS	5,9%	8,0%	
(1) Dado que estos modelos están expresados en términos reales, se ha obtenido la cifra nominal, de manera implícita a partir del supuesto realizado en ese trabajo sobre el deflactor de las importaciones no energéticas.				

del modelo, de manera que los crecimientos medios en 1990 y 1991 coincidiesen con los efectivamente observados.

En los diferentes casos, se han obtenido las predicciones restringidas de modo que se satisfagan los crecimientos interanuales del cuadro 2, no imponiéndose restricciones para el año 1992. Los resultados proporcionados por cada una de estas alternativas se recogen en los gráficos 2 a 6, y de ellos se derivan las siguientes conclusiones:

- 1.- Sea cual sea el crecimiento medio acumulado que se prevea, el perfil dinámico a corto plazo se mantiene constante, existiendo un cambio de nivel y pendiente en la senda de la serie (gráfico 2).
- 2.- En cada caso, se dispone de un indicador mensual que satisface las restricciones impuestas en términos de crecimiento anual (véase gráfico 3).
- 3.- Al extraer una tendencia estocástica como componente no observable de una serie temporal, es conveniente prolongar la serie original con predicciones para evitar problemas en la cola, pues el estimador óptimo se obtiene a partir de un filtro mixto centrado en el que intervienen observaciones tanto del pasado como del futuro, por lo que las observaciones desconocidas tienen que sustituirse por predicciones. En consecuencia, si las predicciones están sistemáticamente sesgadas al alza, estimaremos una tendencia que no sólo se habrá calculado mal al final del periodo de interés, sino que su tasa de crecimiento puede estar reflejando una

Gráfico 2

IMPORTACIONES NO ENERGETICAS

Serie original y predicciones

Nivel

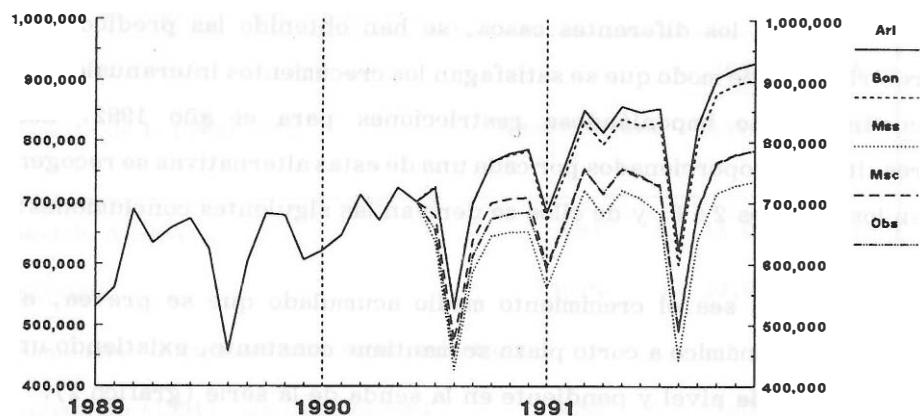
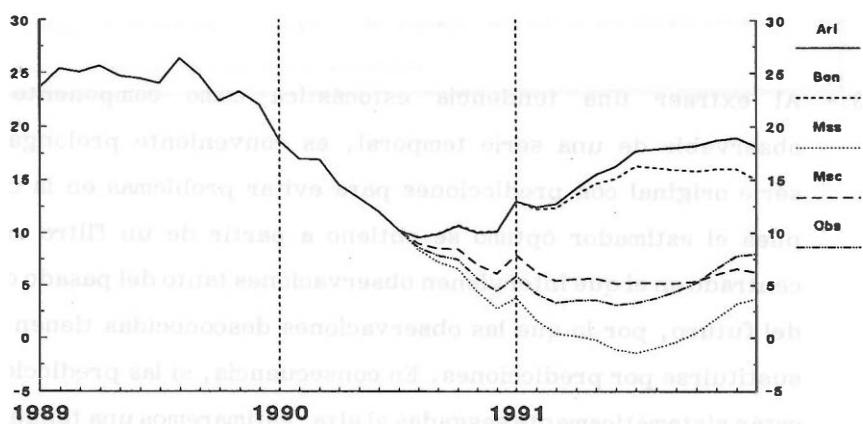


Gráfico 3

IMPORTACIONES NO ENERGETICAS

Serie original y predicciones

T 12,12 sin centrar



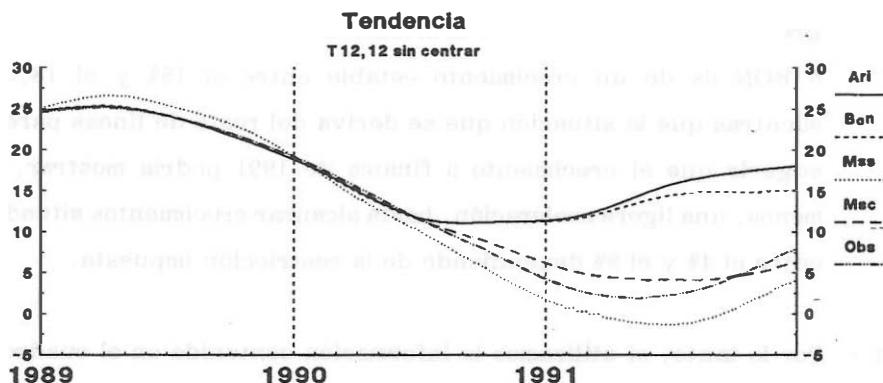
evolución radicalmente distinta. En este sentido, obsérvese el gráfico 4 para apreciar que la situación indicada por las líneas ARI o BON es de un crecimiento estable entre el 15% y el 18,0%, mientras que la situación que se deriva del resto de líneas parece sugerir que el crecimiento a finales de 1991 podría mostrar, al menos, una ligera aceleración, hasta alcanzar crecimientos situados entre el 4% y el 9% dependiendo de la restricción impuesta.

- 4.- Por lo tanto, si utilizamos la información contenida en el cuadro 2 para prolongar la serie de Contabilidad Nacional, y empleamos el método de Denton (1971) para realizar la desagregación temporal, utilizando como indicador la correspondiente tendencia, se obtiene una trimestralización de la magnitud anual que presenta un nivel diferente (véase gráfico 5). Además, el perfil mostrado por cada una de estas alternativas y recogido a partir de crecimientos intertrimestrales (gráfico 6) es bien distinto, lo que condiciona los resultados del ejercicio de trimestralización que se efectúe. En concreto, obsérvese cómo las líneas BON u OBS, por ejemplo, alcanzan un crecimiento similar en 1991, pero la evolución mostrada hasta alcanzarlo es radicalmente distinta.

Así, con la línea BON se alcanza un crecimiento medio del 13% tras una etapa de crecimiento ligeramente desacelerado en 1991, mientras que con la línea OBS el resultado es parecido, pero con una senda que refleja un crecimiento acelerado durante 1991 tras una etapa de desaceleración que culminó en el tercer trimestre de 1990.

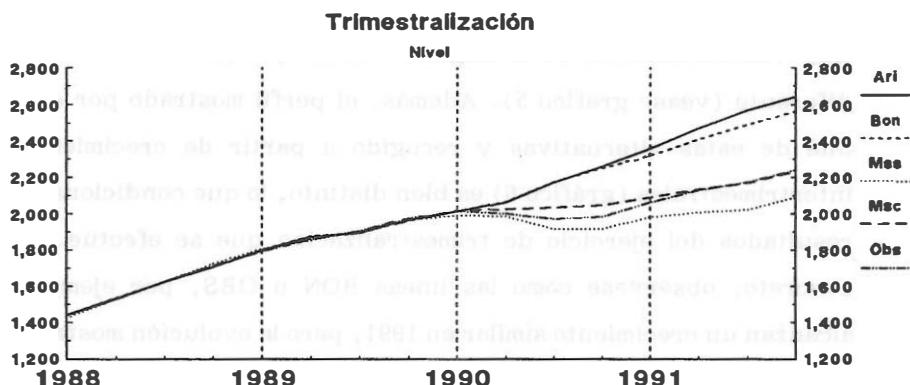
IMPORTACIONES NO ENERGETICAS

Gráfico 4



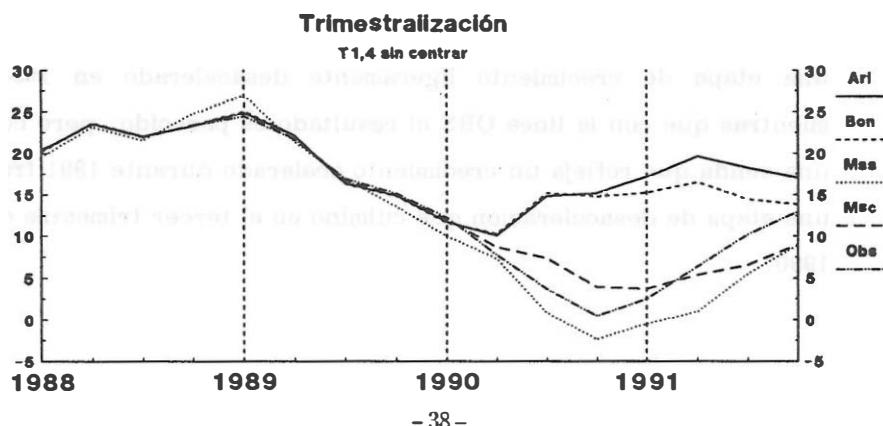
IMPORTACIONES NO ENERGETICAS

Gráfico 5



IMPORTACIONES NO ENERGETICAS

Gráfico 6



6. PREDICCIONES BAJO RESTRICCIONES Y EL ÍNDICE DE PRECIOS AL CONSUMO

El índice de precios de consumo (IPC) es considerado por los agentes económicos como la variable fundamental en el análisis de la inflación¹¹. Así, éstos establecen sus acciones y actitudes indicando sus variables de interés a través del IPC. Por este motivo, las autoridades económicas establecen objetivos de crecimiento de precios basados en este índice, desarrollando políticas de actuación que conduzcan a los valores deseados.

Este comportamiento de las autoridades económicas determina que el valor de interés de este ejercicio no sea una predicción alternativa que pueda proveer un modelo estadístico o un experto, sino que nuestra atención debe centrarse en el objetivo establecido por la autoridad económica y, por tanto, en la posibilidad de su cumplimiento. Desde este punto de vista, la aplicación del método de predicción bajo restricciones nos permitiría obtener la futura senda mensual del IPC coherente tanto con la historia pasada de esta variable como con el valor objetivo de las autoridades económicas, ofreciendo la posibilidad de contrastar mensualmente la coherencia de este objetivo respecto a la predicción que ofrece un modelo univariante¹² y, por tanto, una

¹¹ Sin embargo, el índice de precios de servicios y bienes no energéticos (IPSEBENE) puede ser un indicador de la evolución subyacente de la inflación (ver Espasa *et al.* (1987)), mejor que el índice general.

¹² Obsérvese que la recepción de un nuevo dato supone la revisión de las predicciones univariantes y, como consecuencia, la modificación de la senda objetivo.

medida de su credibilidad. En este sentido, la presencia de desviaciones sistemáticas de la senda de referencia serán indicativas de la imposibilidad de su cumplimiento, por lo que, en este caso, el objetivo debería ser revisado.

Por otro lado, la situación en enero de 1992 nos ofrece un interés adicional al considerar el efecto del aumento del tipo central del impuesto sobre el valor añadido (IVA), junto con aumentos en otros impuestos como los que afectan al tabaco e hidrocarburos. En general, la modelización de fenómenos como el referido anteriormente suele llevarse a cabo mediante la introducción en los modelos estadísticos de variables deterministas que recojan el aumento del tipo medio de los impuestos indirectos dentro del IPC. Esta forma de actuación se realiza principalmente en tres supuestos: en primer lugar, que la traslación impositiva es total, en segundo, un supuesto ceteris paribus respecto de la demanda de bienes que implica su no sustitución, de forma que los precios relativos no varíen por este motivo, y en tercero, se supone que los agentes no anticipan el aumento impositivo. En esta aplicación, los tipos impositivos se obtienen de los resultados de Pérez (1991) para los distintos componentes, por lo que se supone que la traslación total de la modificación del tipo impositivo no se produce hasta pasado el primer trimestre de 1992.

Para la aplicación concreta de la predicción bajo restricciones al IPC, se ha considerado un modelo univariante del índice general, ya que el objetivo de la autoridad económica se establece en términos de este agregado. No obstante, como sólo se desea analizar la compatibilidad del objetivo gubernamental con la senda mostrada por el IPC, con independencia de la diferente evolución de sus componentes,

basta con disponer de un modelo para el agregado. Como valor objetivo, se ha considerado un 5,5% de crecimiento en media anual para 1992 y se ha considerado diciembre de 1991 como la última observación.

Los supuestos considerados en esta aplicación son los siguientes:

- a) Predicción ARIMA.
- b) Predicción en el supuesto de que el crecimiento medio de 1992 sea 5,5%.
- c) Predicción en el supuesto de que el crecimiento medio de 1992 sea 5,5%, pero que el proceso de ajuste se inicie a partir de abril, fecha en la cual se supone que la variación impositiva se habrá trasladado totalmente a los precios.

Los gráficos 7 y 8 muestran, respectivamente, la evolución de la tasa interanual y la T_{12}^{12} , en los diferentes supuestos. En el gráfico 7 se observa cómo debe evolucionar la tasa interanual para alcanzar el objetivo, destacando la diferencia entre la predicción ARIMA, que alcanza el 6% en diciembre, y las restringidas, que suponen, respectivamente, un crecimiento interanual del 4,7% y 4,4% en el último mes. Por otro lado, destaca la diferente senda de los supuestos b) y c), donde se observa cómo en la hipótesis de que el proceso de ajuste hacia el objetivo no se inicia hasta el segundo trimestre del año supone una desaceleración más pronunciada en los restantes nueve meses. En el gráfico 8, se observa que las sendas de los supuestos b) y c) se dirigen progresivamente al objetivo, tras un repunte como consecuencia de los

Gráfico 7

ÍNDICE DE PRECIOS AL CONSUMO

Tasa Interanual

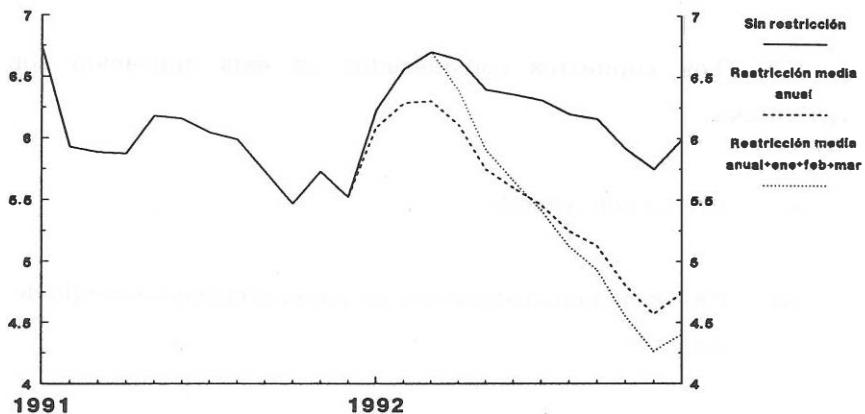
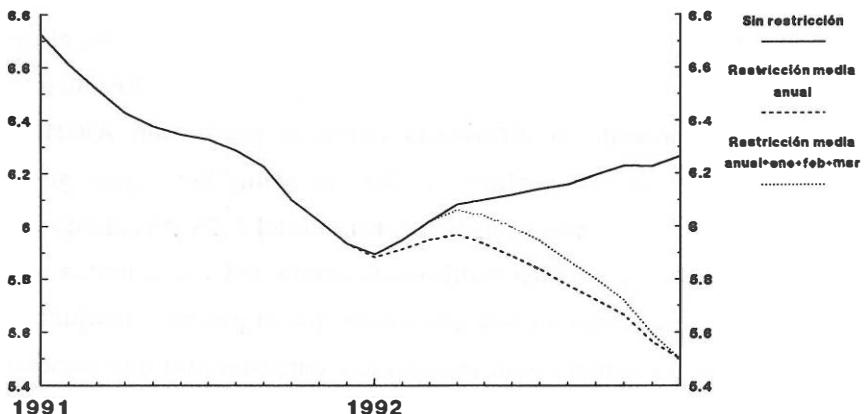


Gráfico 8

ÍNDICE DE PRECIOS AL CONSUMO

T12,12 sin centrar



cambios en la imposición indirecta, a la restricción fijada de 5,5% para diciembre, mientras que la predicción ARIMA refleja un crecimiento medio del 6,26%.

En el cuadro 3, se presentan los resultados obtenidos con información hasta diciembre de 1991¹³.

Una vez obtenidas las sendas mensuales, para cada caso, correspondientes al objetivo fijado, nuestro interés debe centrarse en la posibilidad de su cumplimiento. Observando los valores del estadístico de compatibilidad (1,5 para el supuesto b) y 0,99 para el supuesto c)) hay que concluir que, estadísticamente, el objetivo fijado es alcanzable, a pesar del incremento que supone la modificación de la imposición indirecta.

Cuadro 3

COMPARACION DE RESULTADOS			
RESTRICCIÓN	T_{12}^1	T_{12}^{12}	Q
Ninguna	6,0	6,2	-
Media anual	4,7	5,5	1,5
Media anual + Ene+Feb+Mar	4,4	5,5	0,99

¹³ Las columnas reflejan el tipo de restricción, el valor de T_{12}^1 y T_{12}^{12} en diciembre de 1992 y el valor del estadístico de compatibilidad.

APENDICE

1. RESTRICCIONES ESTOCÁSTICAS SIN CORRELACIÓN ENTRE LAS PERTURBACIONES DE LAS RESTRICCIONES Y LOS ERRORES DEL MODELO ARIMA

El estimador óptimo cuando existen restricciones estocásticas, resulta ser

$$Z^* = \left([I|A'] \begin{bmatrix} \sigma_a^2 \Psi \Psi' & \Sigma_{eu} \\ \Sigma_{ue} & \Sigma_u \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I \\ A \end{pmatrix} \right)^{-1} \left([I|A'] \begin{bmatrix} \sigma_a^2 \Psi \Psi' & \Sigma_{eu} \\ \Sigma_{ue} & \Sigma_u \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{Z} \\ b \end{pmatrix} \right) \quad (A.1)$$

Si suponemos que no existe correlación entre las perturbaciones de las restricciones y los errores del modelo ARIMA, $\Sigma_{eu} = 0$ $\Sigma_{ue} = 0'$.

Para obtener una expresión alternativa, conviene tener en cuenta las siguientes identidades:

$$1. (A+BDB')^{-1} = A^{-1} - A^{-1}BEB'A^{-1} + A^{-1}BE(E+D)^{-1}EBA'^{-1} \quad (A.2)$$

$$2. (A+B)^{-1} = A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}B^{-1} \quad (A.3)$$

$$3. B(B'A^{-1}B+D^{-1})^{-1}B' = BEB' + BE(E+D)^{-1}EB \quad (A.4)$$

donde $E = (B'A^{-1}B)^{-1}$

Si invertimos en (A.1) la matriz diagonal por bloques y operamos, tenemos que

$$Z^* = [(\sigma_a^2 \Psi \Psi')^{-1} + A' \Sigma_u^{-1} A]^{-1} [(\sigma_a^2 \Psi \Psi')^{-1} \hat{Z} + A' \Sigma_u^{-1} b] \quad (A.5)$$

Considerando (A.2)

$$\begin{aligned}
 Z^* = & \hat{Z} - (\sigma_a^2 \Psi \Psi') A' [A (\sigma_a^2 \Psi \Psi') A']^{-1} A \hat{Z} + \\
 & + (\sigma_a^2 \Psi \Psi') A' [A (\sigma_a^2 \Psi \Psi') A']^{-1} [A (\sigma_a^2 \Psi \Psi') A']^{-1} + \Sigma_u^{-1} \\
 & \cdot [A (\sigma_a^2 \Psi \Psi') A']^{-1} A \hat{Z} + (\sigma_a^2 \Psi \Psi') A' \Sigma_u^{-1} b - (\sigma_a^2 \Psi \Psi') A' \Sigma_u^{-1} b + \\
 & + (\sigma_a^2 \Psi \Psi') A' [A (\sigma_a^2 \Psi \Psi') A']^{-1} [A (\sigma_a^2 \Psi \Psi') A']^{-1} + \Sigma_u^{-1} \Sigma_u^{-1} b
 \end{aligned} \quad (A.6)$$

Empleando (A.3) y (A.4):

$$Z^* = \hat{Z} + (\sigma_a^2 \Psi \Psi') A' [A (\sigma_a^2 \Psi \Psi') A' + \Sigma_u]^{-1} (b - A \hat{Z}) \quad (A.7)$$

que es la expresión buscada

1.1. La varianza del predictor restringido

Reordenando la expresión (23), se tiene que

$$Z^* = P^* b + (I - P^* A) \hat{Z} \quad (A.8)$$

y empleando (11) entonces

$$Z^* = P^*b + Z - P^*AZ + e - P^*Ae \quad (A.9)$$

Por lo que, cuando se verifica la restricción,

$$Z^* - Z = -P^*u + (I - P^*A)e \quad (A.10)$$

Calculando la varianza en (A.10)

$$\text{Var}(Z^* - Z) = (I - P^*A) \sigma_a^2 (\Psi\Psi') (I - P^*A)' + P^* \Sigma_u P^* \quad (A.11)$$

y operando llegamos a

$$\text{Var}(Z^* - Z) = \sigma_a^2 (\Psi\Psi') (I - P^*A)' + P^* \Sigma_u P^* \quad (A.12)$$

que es la expresión buscada

1.2. El contraste de compatibilidad

Sea $a \sim N(0, \sigma_a^2 I)$

Definimos el vector de información v de dimensión r como

$$v = b - A \hat{Z} \quad (A.13)$$

En la hipótesis nula $H_0: b + u = AZ$

$$\mathbf{v} = -\mathbf{u} + \mathbf{A} \Psi \mathbf{a} \quad (\text{A.14})$$

\mathbf{v} es un vector $r \times h$ que sigue una distribución normal, por ser combinación lineal de variables normales. Además, sus dos primeros momentos vienen dados por

$$\begin{aligned} E[\mathbf{v}] &= 0 \\ E[\mathbf{v}\mathbf{v}'] &= \Sigma_u + \sigma_a^2 \mathbf{A} \Psi \Psi' \mathbf{A}' \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Por tanto,

$$\mathbf{v} \sim N(0, \sigma_a^2 \mathbf{A} \Psi \Psi' \mathbf{A}' + \Sigma_u) \quad (\text{A.16})$$

Por las propiedades de la distribución normal,

$$Q = \mathbf{v}' (\sigma_a^2 \mathbf{A} \Psi \Psi' \mathbf{A}' + \Sigma_u)^{-1} \mathbf{v} \sim \chi_r^2 \quad (\text{A.17})$$

Llegando así a la expresión deseada:

$$Q = (\mathbf{b} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{Z}})' (\sigma_a^2 \mathbf{A} \Psi \Psi' \mathbf{A}' + \Sigma_u)^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{Z}}) \sim \chi_r^2 \quad (\text{A.18})$$

REFERENCIAS

Alvarez, L.J., Delrieu, J.C. y Jareño, J. (1992) "Estimación de valores ausentes con información de agregados temporales". Banco de España (trabajo en curso).

Bates, J.M. y Granger, C.W.J. (1969) "The combination of forecasts". Operational Research Quarterly, págs. 451-468.

Box, G.E.P. y Jenkins, G.M. (1970) Time series analysis, forecasting and control. San Francisco, Holden Day.

Box, G.E.P. y Tiao, G.C. (1976) "Comparison of Forecast and Actuality". Applied Statistics, págs. 195-200.

Brubacher, S.R. y Tunnicliffe-Wilson, G. (1976) "Interpolating Time series with application to the estimation of holiday effects on electricity demand". Applied Statistics, págs. 107-116.

Burman, J.P. (1980) "Seasonal adjustment by signal extraction". Journal of the Royal Statistical Society, Series A, págs. 321-347.

Cholette, P.A. (1982) "Prior Information and ARIMA forecasting". Journal of Forecasting, 1, págs. 375-383.

Clemen, R. T. (1989) "Combining forecasts: A review and annotated bibliography". International Journal of Forecasting, págs. 559-583.

Corrado, C. y Haltamier, J. (1987) "The use of High-Frequency Data in Model-Based Forecasting at the Federal Reserve Board". Ponencia presentada en la sesión Can Economic Forecasting be Improved?, AEA Meetings, Chicago, Illinois, December 29, 1987.

Corrado, C. y Greene, M. (1987) "Reducing Uncertainty in short-term Projections: Linkage of monthly and quarterly models". Journal of Forecasting, págs. 77-102.

Denton, F. T. (1971) "Adjustment of Monthly or Quarterly Series to Annual Totals: An Approach Based on Quadratic Minimization". Journal of the American Statistical Association, págs. 99-102.

Durbin (1953) "A Note on Regression When there is Extraneous Information about one of the Coefficients". Journal of the American Statistical Association, págs. 799-808.

Espasa, A., Manzano, M.C., Matea, M.LL. y Catasús, V. (1987) "La inflación subyacente en la economía española: estimación y metodología". Boletín Económico. Marzo. Banco de España, págs. 32-51.

Espasa, A., Delrieu, J.C. y Alvarez, L.J. (1992) "Aproximación lineal por tramos a comportamientos no lineales: una aplicación al estudio univariante de las importaciones no energéticas". Banco de España. Servicio de Estudios. Documento de Trabajo (próxima publicación).

Fuhrer, J. y Haltmaier, J. (1988) "Minimum Variance Pooling of Forecasts at Different Levels of Aggregation". Journal of Forecasting, págs. 63-73.

Guerrero, V.M. (1989) "Optimal Conditional ARIMA forecasts". Journal of Forecasting, 8, págs. 215-229.

Granger, C.W.J. y Ramanathan, R. (1984) "Improved methods of forecasting". Journal of Forecasting, págs. 197-204.

Howrey, E.P., Hymans, S.H. y Donihue, M.R. (1991) "Merging Monthly and Quarterly Forecasts: Experience with MQEM". Journal of Forecasting, págs. 255-268.

Jenkins, G.M. (1982) "Some Practical Aspects of Forecasting in Organizations". Journal of Forecasting, págs. 3-21.

Lütkepohl, H. (1988) "Prediction Tests for Structural Stability". Journal of Econometrics, págs. 267-296.

Newbold, P. y Granger, C.W.J. (1974) "Experience with forecasting univariate time Series and the combination of forecasts (with discussion)". Journal of the Royal Statistical Society, Series A, págs. 131-149.

Pankratz, A. (1989) "Time Series Forecasts and Extra-model Information". Journal of Forecasting, 8, págs. 75-83.

Peña, D. y Maravall, A. (1991) "Interpolation, outliers and inverse autocorrelations". Communications in Statistics, Theory and Methods, págs. 3175-3186.

Pérez, M. (1991) mimeo. Banco de España.

Sebastián, M. (1991) "Un análisis estructural de las exportaciones e importaciones españolas: evaluación del periodo 1989-91 y perspectivas a medio plazo". Información Comercial Española. Noviembre, págs. 9-25.

Theil, H. y Goldberger, A.S. (1961): "On Pure and Mixed Statistical Estimation in Economics". International Economic Review, vol. 2, págs. 65-78.

Trabelsi, A. y Hillmer, S.C. (1989) "A Benchmarking Approach to Forecast Combination". Journal of Business and Economic Statistics, vol. 7, págs. 353-362.

DOCUMENTOS DE TRABAJO (1)

- 8901 **M^a de los Llanos Matea Rosa:** Funciones de transferencia simultáneas del índice de precios al consumo de bienes elaborados no energéticos.
- 8902 **Juan J. Dolado:** Cointegración: una panorámica.
- 8903 **Agustín Maravall:** La extracción de señales y el análisis de coyuntura.
- 8904 **E. Morales, A. Espasa y M. L. Rojo:** Métodos cuantitativos para el análisis de la actividad industrial española. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)
- 9001 **Jesús Albaracín y Concha Artola:** El crecimiento de los salarios y el deslizamiento salarial en el período 1981 a 1988.
- 9002 **Antoni Espasa, Rosa Gómez-Churruca y Javier Jareño:** Un análisis econométrico de los ingresos por turismo en la economía española.
- 9003 **Antoni Espasa:** Metodología para realizar el análisis de la coyuntura de un fenómeno económico. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)
- 9004 **Paloma Gómez Pastor y José Luis Pellicer Miret:** Información y documentación de las Comunidades Europeas.
- 9005 **Juan J. Dolado, Tim Jenkinson and Simon Sosvilla-Rivero:** Cointegration and unit roots: A survey.
- 9006 **Samuel Bentolila and Juan J. Dolado:** Mismatch and Internal Migration in Spain, 1962-1986.
- 9007 **Juan J. Dolado, John W. Galbraith and Anindya Banerjee:** Estimating euler equations with integrated series.
- 9008 **Antoni Espasa y Daniel Peña:** Los modelos ARIMA, el estado de equilibrio en variables económicas y su estimación. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)
- 9009 **Juan J. Dolado and José Viñals:** Macroeconomic policy, external targets and constraints: the case of Spain.
- 9010 **Anindya Banerjee, Juan J. Dolado and John W. Galbraith:** Recursive and sequential tests for unit roots and structural breaks in long annual GNP series.
- 9011 **Pedro Martínez Méndez:** Nuevos datos sobre la evolución de la peseta entre 1900 y 1936. Información complementaria.
- 9101 **Javier Valles:** Estimation of a growth model with adjustment costs in presence of unobservable shocks.
- 9102 **Javier Valles:** Aggregate investment in a growth model with adjustment costs.
- 9103 **Juan J. Dolado:** Asymptotic distribution theory for econometric estimation with integrated processes: a guide.
- 9104 **José Luis Escrivá y José Luis Malo de Molina:** La instrumentación de la política monetaria española en el marco de la integración europea. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)
- 9105 **Isabel Argimón y Jesús Briones:** Un modelo de simulación de la carga de la deuda del Estado.
- 9106 **Juan Ayuso:** Los efectos de la entrada de la peseta en el SME sobre la volatilidad de las variables financieras españolas. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)
- 9107 **Juan J. Dolado y José Luis Escrivá:** La demanda de dinero en España: definiciones amplias de liquidez. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)
- 9108 **Fernando C. Ballabriga:** Instrumentación de la metodología VAR.
- 9109 **Soledad Núñez:** Los mercados derivados de la deuda pública en España: marco institucional y funcionamiento.
- 9110 **Isabel Argimón y José M^a Roldán:** Ahorro, inversión y movilidad internacional del capital en los países de la CE. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)
- 9111 **José Luis Escrivá y Román Santos:** Un estudio del cambio de régimen en la variable instrumental del control monetario en España. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)
- 9112 **Carlos Chuliá:** El crédito interempresarial. Una manifestación de la desintermediación financiera.
- 9113 **Ignacio Hernando y Javier Vallés:** Inversión y restricciones financieras: evidencia en las empresas manufactureras españolas.

- 9114 **Miguel Sebastián:** Un análisis estructural de las exportaciones e importaciones españolas: evaluación del período 1989-91 y perspectivas a medio plazo.
- 9115 **Pedro Martínez Méndez:** Intereses y resultados en pesetas constantes.
- 9116 **Ana R. de Lamo y Juan J. Dolado:** Un modelo del mercado de trabajo y la restricción de oferta en la economía española.
- 9117 **Juan Luis Vega:** Tests de raíces unitarias: aplicación a series de la economía española y al análisis de la velocidad de circulación del dinero (1964-1990).
- 9118 **Javier Jareño y Juan Carlos Delrieu:** La circulación fiduciaria en España: distorsiones en su evolución.
- 9119 **Juan Ayuso Huertas:** Intervenciones esterilizadas en el mercado de la peseta: 1978-1991.
- 9120 **Juan Ayuso, Juan J. Dolado y Simón Sosvilla-Rivero:** Eficiencia en el mercado a plazo de la peseta.
- 9121 **José M. González-Páramo, José M. Roldán y Miguel Sebastián:** Issues on Fiscal Policy in Spain.
- 9201 **Pedro Martínez Méndez:** Tipos de interés, impuestos e inflación.
- 9202 **Víctor García-Vaquero:** Los fondos de inversión en España.
- 9203 **César Alonso y Samuel Bentolila:** La relación entre la inversión y la «Q de Tobin» en las empresas industriales españolas. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)
- 9204 **Cristina Mazón:** Márgenes de beneficio, eficiencia y poder de mercado en las empresas españolas.
- 9205 **Cristina Mazón:** El margen precio-coste marginal en la encuesta industrial: 1978-1988.
- 9206 **Fernando Restoy:** Intertemporal substitution, risk aversion and short term interest rates.
- 9207 **Fernando Restoy:** Optimal portfolio policies under time-dependent returns.
- 9208 **Fernando Restoy and Georg Michael Rockinger:** Investment incentives in endogenously growing economies.
- 9209 **José M. González-Páramo, José M. Roldán y Miguel Sebastián:** Cuestiones sobre política fiscal en España.
- 9210 **Angel Serrat Tubert:** Riesgo, especulación y cobertura en un mercado de futuros dinámico.
- 9211 **Soledad Núñez Ramos:** Fras, futuros y opciones sobre el MIBOR.
- 9212 **Federico J. Sáez:** El funcionamiento del mercado de deuda pública anotada en España.
- 9213 **Javier Santillán:** La idoneidad y asignación del ahorro mundial.
- 9214 **María de los Llanos Matea:** Contrastes de raíces unitarias para series mensuales. Una aplicación al IPC.
- 9215 **Isabel Argimón, José Manuel González-Páramo y José María Roldán:** Ahorro, riqueza y tipos de interés en España.
- 9216 **Javier Azcárate Aguilar-Amat:** La supervisión de los conglomerados financieros.
- 9217 **Olympia Bover:** Un modelo empírico de la evolución de los precios de la vivienda en España (1976-1991).
- 9218 **Jeroen J. M. Kremers, Neil R. Ericsson and Juan J. Dolado:** The power of cointegration tests.
- 9219 **Luis Julián Alvarez, Juan Carlos Delrieu, Javier Jareño:** Tratamiento de predicciones conflictivas: empleo eficiente de información extramuestral.

(1) Los Documentos de Trabajo anteriores a 1989 figuran en el catálogo de publicaciones del Banco de España.

Información: Banco de España
Sección de Publicaciones. Negociado de Distribución y Gestión
Teléfono: 338 51 80
Alcalá, 50. 28014 Madrid