BANCO DE ESPAÑA

RIESGO, ESPECULACION Y COBERTURA EN UN MERCADO DE FUTUROS DINAMICO

Angel Serrat Tuber

SERVICIO DE ESTUDIOS
Documento de Trabajo nº 9210

BANCO DE ESPAÑA

RIESGO, ESPECULACION Y COBERTURA EN UN MERCADO DE FUTUROS DINAMICO

Angel Serrat Tubert (*)

(*) Quisiera agradecer los comentarios de Emilio Cerdá, Joan Anton Ketterer y Fernando Restoy, así como al Centro de Estudios Monetarios y Financieros por el uso de su infraestructura. Los errores que persistan son responsabilidad mía.

SERVICIO DE ESTUDIOS
Documento de Trabajo nº 9210

El Banco de España al publicar esta serie pretende facilitar la difusión de estudios de interés que contribuyan al mejor conocimiento de la economía española.

Los análisis, opiniones y conclusiones de estas investigaciones representan las ideas de los autores, con las que no necesariamente coincide el Banco de España.

ISBN: 84-7793-149-6
Depósito legal: M-8447-1992
Imprenta del Banco de España

RIESGO, ESPECULACION Y COBERTURA EN UN MERCADO DE FUTUROS DINAMICO

Angel Serrat Tubert
Banco de España, Madrid.

Resumen

En este trabajo se presenta un modelo del mercado de futuros líquidado contínuamente (marked-to-market) en una economía caracterizada por procesos de difusión y de salto-difusión (jump-diffusion), agentes aversos al riesgo, información simétrica y completa. Se muestra que las posiciones que los agentes toman en este mercado raramente son sólo especulativas o sólo de cobertura y se investiga la naturaleza de las mismas.

La principal contribución del trabajo radica en mostrar que la prima de riesgo se forma no sólo para atraer contrapartidas a las demandas netas de cobertura de activos de otros mercados, sino tambien para compensar variaciones discretas y repentinas en el precio de los activos. De esta forma se propone una réplica la crítica tradicional de los modelos de cobertura (hedging models).

0. Introducción

Un futuro financiero es un contrato que especifica la entrega de un activo (denominado activo subyacente) en una fecha futura determinada, estandarizada para todos los contratos. Dicho contrato tiene tres características especiales que le distinguen de cualquier otro activo financiero y dificultan su valoración: En primer lugar, dicho contrato se liquida contínuamente entre las partes del mismo mediante el abono/adeudo de la variación del precio de futuro financiero en una cuenta mantenida con un intermediario (denominado cámara) y hasta la finalización del contrato. En segundo lugar, no existe un sólo activo subyacente sino varios, y el vendedor es el que tiene la opción de entregar uno u otro, a la terminación del contrato (market-basket-delivery). En tercer lugar, el vendedor dispone de un plazo determinado, normalmente una semana, para entregar el activo subyacente escogido a la terminación del contrato (opción temporal).

Estas particularidades, especialmente la primera, imposibilitan la valoración el futuro financiero mediante simples condiciones de arbitraje (cost-of-carry), como si fuera un contrato a plazo.

Una valoración que tenga en cuenta todas estas particularidades es difícil y sólo se ha obtenido resolviendo numéricamente un modelo de equilibiro general (ver Serrat, 1990a y 1990b). La motivación del presente trabajo radica en obtener resutados analíticos de interés para el estudio de las estrategias de inversión y de la formación de primas de riesgo en el mercado de futuros, modelizando tan sólo la primera de las tres características comentadas anteriormente. Como se verá, el procedimiento de liquidación contínua constituye la diferencia crucial entre el mercado de futuros y cualquier otro mercado. De esta forma, la estrategia de modelización anterior no pierde generalidad a pesar de no modelizar explícitamente la relación del precio del futuro financiero con la de su activo subyacente en cada momento (el activo denominado cheapest-to-deliver en el caso de un futuro financiero).

En este trabajo se presenta un modelo para un mercado de futuros financieros liquidados contínuamente (marked-to-market) en una economía caracterizada por procesos estocásticos de difusión y salto-difusión, preferencias diversas e información simétrica. Con dicho modelo se pretende examinar los mecanismos de transferencia de riesgo en los mercados de futuros y explicar la formación de primas de riesgo en dichos mercados, a la luz de las relaciones reveladas por la experiencia empírica entre las posiciones en mercados al contado y el comportamiento estocástico de precios de futuros financieros y no financieros.

En primer lugar se presentan los trabajos más representativos en la literatura sobre modelización de mercados de futuros y se plantean algunas de las cuestiones que motivan el presente trabajo. En el modelo se muestra cómo la posición que cada agente toma en el mercado de futuros resulta de agregar un componente puramente especulativo y otro de cobertura pura. Además, la prima de riesgo se relaciona no con la posición neta abierta en los mercados al contado (net hedging pressure) sino con el riesgo total abierto en los mercados al contado medido por las betas del futuro financiero con respecto a los activos de los mercados al contado. De esta forma se pone en relación la prima de riesgo del futuro financiero con su riesgo sistemático y su demanda para fines de cobertura.

Posteriormente se introducen perturbaciones (shocks) en la economía que provocan discontinuidades en la trayectoria de los precios de los activos, lo cual permite caracterizar aproximadamente primas de riesgo no nulas aún cuando las posiciones en los mercados al contado estén exactamente compensadas.

1. Los modelos de mercados de futuros en la literatura:

La existencia de una prima de riesgo en los mercados de futuros es un tema tradicional de investigación teórica y aplicada en estudios sobre instrumentos derivados. En principio, no hay porqué pensar que en una economía con agentes racionales, dotaciones, preferencias y una tecnología dadas, los precios de los futuros financieros se comporten como martingalas (prima de riesgo nula).

La evidencia empírica tiende a favorecer la hipótesis de la existencia de una prima de riesgo no nula en los mercados de futuros, aunque contrastar si los precios de los futuros se comportan como martingalas es complejo dada la dificultad de especificar el conjunto de información relevante. Los trabajos más representativos pueden ser Jackson (1986) para el mercado de oro, Rajamaran (1986) para los de café, caucho y cacao, Raynauld y Tessier (1984) para los de trigo, avena y maíz, Fama (1976), y Friedman (1979) para los de letras de tesoro americanas, y Cornell (1977), Hansen y Hodrick (1980), Hodrick y Srivastava(1984) y Korajczy (1985) para los mercados de cambios. La teoría se centra en la explicación de la formación de primas de riesgo en estos mercados, y contempla dos enfoques alternativos, no excluyentes: los modelos "de cobertura" y los basados en el equilibrio general.

Los denominados "modelos de cobertura" y los basados en el modelo de valoración de activos de capital con consumo (CCAPM) garantizan, en general, la existencia de una prima de riesgo positiva/negativa si la mayoría de las operaciones de cobertura (toma de posiciones en un mercado para compensar los posibles movimientos de precios desfavorables en otro mercado) se realizan en forma de operaciones cortas/largas (vender/comprar futuros para protegerse de un descenso/aumento en los precios de los activos al contado).

Algunos modelos basados en el CAPM de Sharpe (1964) y Lintner (1965) apuntan la inexistencia de prima de riesgo al mostrar que los precios de los futuros no soportan riesgo sistemático alguno y no requieren inversión, al margen de la garantía colateral,(Dusak (1973), Grauer (1977), Bodic and Rosansky (1980)). No obstante, en este sentido Carter, Rousser y Schmitz (1983) y especialmente Breeden (1979, 1980) derivan primas de riesgo no nulas, formulando los parámetros del CAPM como aleatorios, en el primer caso, y permitiendo que los precios de los bienes de consumo y el conjunto de oportunidades de inversión varien aleatoriamente, en el segundo.

Los denominados modelos de equilibrio con múltiples bienes apuntan la existencia de una prima de riesgo que es función de la utilidad de futuro para efectuar coberturas de la utilidad marginal del consumo esperada. De esta forma, los precios de los futuros incorporan especulación sobre los precios futuros de los bienes de consumo, la utilidad marginal futura de los mismos y sobre los tipos de interés -debida a la reinversión continua de las variaciones de precio del futuro hasta su vencimiento- (Richard y Sundaresan (1981), Grauer y Litzemberger (1979)). Dichos modelos son difíciles de contrastar debido a la amplitud del conjunto de información que hay que incorporar en el contraste estadístico.

Los modelos de cobertura (<u>hedging models</u>) explican la existencia de primas de riesgo por la asimetría entre los agentes que operan en el mercado de futuros. Los especuladores entran en el mismo debido al riesgo que los agentes que practican cobertura desean transmitir, y reciben una prima de riesgo por ello. De esta forma la prima de riesgo será positiva (negativa) si la posición total neta de los agentes que practican cobertura es corta/larga (predominio de posiciones largas/cortas en los mercados al contado). Esta línea de investigación es la que tiene más tradición, que se remonta a los trabajos seminales de Keynes (1930, la <u>normal backwardation theory</u> formulada en el *Treatise*), Houthakker (1957 a y b), Telser (1958, 1960), Cootner (1960,1967), Gray (1960, 1961), Rockwell (1967) y Miracle (1972), y posteriormente Stein (1979), Anderson y Danthine (1981,1983).

Los estudios empíricos realizados para contrastar los resultados derivados de los modelos de cobertura, examinan la relación entre los costes de cobertura y las primas de riesgo <u>ex-post</u> observadas mediante el exámen de la cuenta de resultados de especuladores y agentes que practican cobertura (Cootner, 1960, 1967, Miracle 1972 y Telser 1967). Aunque los resultados de dichos estudios son muy sensibles a los supuestos realizados sobre los agentes de los que no se dispone de información (Peck 1982), dichos resultados tienden a favorecer la idea que la posición global neta por motivo de cobertura no es el único factor que determina las primas de riesgo (es decir, se rechaza la <u>net hedging pressure hypothesis</u>). En concreto, es frecuente detectar períodos en los que las posiciones cortas y largas de agentes que practican cobertura, en ciertos mercados de futuros, prácticamente se compensan y si embargo la prima de riesgo es significativamente no nula.

En este trabajo se desarrolla un modelo de cobertura en una economía con futuros financieros y contratación contínua que ofrece, en primer lugar, una reinterpretación de ciertos resultados de estrategias de inversión conocidos. El tratamiento de un mercado de futuros cuando la incertidumbre se modeliza con procesos de difusión no es nuevo en la literatura (ver Duffie, 1990), sin embargo la principal aportación metodológica del presente trabajo consiste en introducir procesos de salto-difusión. Dicho tratamiento permite justificar la existencia de primas de riesgo en el precio del contrato de futuros (desviaciones de la hipótesis de martingala) aún cuando las posiciones netas al contado de los activos correlacionados con el futuros financiero sean nulas. Este resultado es nuevo en la literatura bajo los supuestos especificados, tanto la referente a modelos de cobertura como los de equilibrio general: La posible existencia de prima de riesgo no nula con "net hedging pressure" no nula se deduce sin imponer que los agentes sean heterogéneos (como en el modelo con producción y almacenamiento de Anderson y Danthine (1983)) o que la covarianza instantanea con el consumo (consumption beta) sea no nula.

En la sección 2 se desarrolla el modelo en el caso de que la incertidumbre está modelizada mediante procesos de difusión puros, y se derivan las estrategias de inversión óptimas en el mercado de futuros y los factores determinantes de la formación de una prima de riesgo. En la sección 3 se introducen se relaja la condición de continuidad en los procesos estocásticos y se obtienen de nuevo las estrategias de inversión y las primas de riesgo de equilibrio. La sección 4 compara los resultados y concluye el trabajo. Por último, en el apéndice se desarrollan las condiciones mediante las cuales el análisis en equilibrio parcial es compatible con la existencia de un equilibrio general subyacente.

2. Un modelo del mercado de futuros en una economía caracterizada por procesos de difusión:

Sea una economía con incertidumbre en un período de tiempo acotado, M activos financieros e I agentes aversos al riesgo con dotaciones de activos financieros dadas y simétricamente informados.

La incertidumbre se modelizará mediante un espacio de probabilidad de Wiener $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbb{P})$. El conjunto Ω incluye todos los sucesos elementales que pueden ocurrir en un horizonte terminal $T>0$. La partición $\mathbf{F}$ es $\mathbb{P}$-completa y es el σ-álgebra de elementos medibles en Ω (sucesos de los cuales los agentes de la economía pueden inferir probabilidades basadas en la medida de probabilidad $\mathbb{P}$). Los sucesos se revelarán a cada agente en el tiempo según la filtración $\mathbb{F}=\{\mathbf{F}_t, t\in[0,T]\}$, dónde $\mathbf{F}_t$ es el conjunto de sucesos que pueden ocurrir en t o antes, siendo $\mathbf{F}_s \subset \mathbf{F}_t$ para s<t (esto es, los agentes no olvidan que un suceso ha ocurrido si se ha revelado). La filtración es contínua por la derecha, es decir, $\mathbf{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathbf{F}_s\ \forall t\in[0,T)$, (la nueva información en t es conocida precisamente en t y no en un instante inmediatamente posterior). $\mathbf{F}_0$ es el σ-álgebra trivial (nada se sabe en t=0) y $\mathbf{F}_T=\mathbf{F}$ (toda la información es revelada en T). La incertidumbre se revelará mediante las realizaciones de un proceso de Wiener en el espacio probabilistico completamente filtrado $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$.[1]

Escribamos los precios de los M activos financieros de la economía especificando los procesos de difusión siguientes. Se supone la existencia de K≤M fuentes de incertidumbre, representada por un vector Kx1-dimensional de procesos independientes de Wiener, de forma que:

$$dP_t = \alpha_t dt + \sigma_t dz_t \tag{1}$$

donde dP_t es un vector Mx1-dimensional, α_t es un vector de derivas Mx1-dimensional, σ_t es una matriz MxK-dimensional de coeficientes de difusión. Tanto el vector α_t como la matriz σ_t se suponen bien definidos en el sentido de que son procesos integrables y predecibles, esto es, medibles con respecto al sigma-álgebra generado por cada proceso α y σ en el limite por la izquierda de t. En definitiva, los procesos (1) están adaptados a la filtración de cada agente. En estas condiciones, el proceso multidimensional especificado en (1) es un proceso de Itô. Por otra parte se supone que existe un mínimo de K≤M activos linealmente independientes, esto es, los mercados son completos.

Introduzcamos en la economía anterior un contrato de futuros negociable, cuyo precio, en el marco gaussiano anterior, tendrá representación estocástica en $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$:[2]

$$dF_t = \pi_t dt + \nu_t dz_t \tag{2}$$

dónde π_t es un proceso uni-dimensional y ν_t es un vector 1xK dimensional de coeficientes de difusión, siendo z_t el vector de procesos Wiener de (1). Al igual que antes, π y ν se suponen procesos adaptados a la filtración, común a todos los agentes.[3]

En (2) la deriva del proceso , π_t, debe interpretarse como la prima de riesgo del futuro financiero. La rentabilidad instantánea esperada para el futuro financiero en un momento t, $R^e_F(t)$, será:

$$R^e_F(t)dt = E_t(dF_t)/F_t = \pi_t/F_t$$

En la literatura se entiende habitualmente por prima de riesgo el exceso de la rentabilidad esperada sobre el tipo de interés sin riesgo. Sin embargo en el caso de un futuro financiero la esperanza de rentabilidad íntegra es la prima de riesgo, ya que el futuro financiero no exige inversión inicial alguna (en la práctica existe una pequeña garantía colateral inicial que en el modelo consideraremos nula).

El futuro financiero es liquidado contínuamente (<u>marked-to-market</u>). La posición que se toma en un momento dado en su negociación viene expresada por el escalar $\vartheta_t \in \mathbb{R}$. De esta forma, ϑ representa el número de contratos de futuros adquiridos ($\vartheta>0$) ó vendidos ($\vartheta<0$). Los contratos se suponen perfectamente divisibles. Se supone, además, que no hay inversión inicial en garantía colateral.

En cada momento la variación del precio del futuro se carga o se acredita en la cuenta que el agente mantiene con una cámara de contratación organizadora del mercado al tipo de interés instantáneo, que se supone que sigue un proceso de difusión adaptado a $\mathbb{F}$ cualquiera:

$$dr_t = \beta(r_t, t)dt + \omega(r_t, t)dz_t \qquad (3)$$

La variación del saldo en la posición a futuros es $\vartheta_t \Delta F_t$, $\forall t>0$, que se invierte (o financia) al tipo instantaneo r_t. El saldo con la cámara es, entonces:

$$S_t(\vartheta) = \int_0^t e^{r_s(t-s)}\vartheta_s dF_s \qquad (4)$$

Aplicando el lema de Itô multidimensional a (4) para obtener su representación dinámica, se tiene:

$$dS_t(\vartheta) = \left[r_t S_t(\vartheta) + \vartheta_t dF_t + \vartheta_t \pi_t\right]dt + \vartheta_t \nu_t dz_t =$$

$$= \left[r_t S_t(\vartheta) + \vartheta_t \pi_t\right]dt + \vartheta_t \nu_t dz_t \qquad (5)$$

ya que $\partial(S_t(\vartheta))/\partial r_t|_{r_t} = 0$[4], y $dt^2 = dz_t dt = 0$.

Cada agente dispone de una cartera[5] $\rho' \in \mathbb{R}^M$ (siendo ρ_i, $i=1,2,..,M$, la cantidad del activo i en su posición en el mercado de activos financieros al contado) y que consideraremos fija. Esto es, se supone que los mercados son completos antes de la introducción del futuro financiero-ver al apéndice para una discusión de este tema-. De esta forma su nivel de riqueza en cada momento variará según:[6]

$$d\Re_t(\vartheta) = \rho' dP_t + dS_t(\vartheta_t) \qquad (6)$$

dónde por comodidad se omiten, de momento, los subíndices correspondientes a los agentes. Desarrollando $d\Re_t$ -sustituyendo (1) y (4) en (6)-, el nivel de riqueza tendrá representación estocástica:

$$d\Re_t = \left[\rho'\alpha_t + r_t S_t(\vartheta) + \vartheta_t \pi_t\right]dt + \left[\rho'\sigma_t + \vartheta_t \nu_t\right]dz_t \qquad (7)$$

Planteemos el problema del agente en un momento inicial, sea t=0, y un horizonte t=T, como:

$$\underset{\vartheta_t \in \Xi(t)}{\text{Máx}}\ E_0\left\{\int_0^T \mathfrak{B}(\mathfrak{R}_t(\vartheta), t)dt\right\} \quad \text{sujeto a (7)} \tag{8}$$

siendo $\mathfrak{B}(\mathfrak{R}_t(\vartheta_t), t) = e^{-\eta t}\mathfrak{U}(\mathfrak{R}_t(\vartheta_t))$, η el parámetro de descuento temporal y $\mathfrak{R}_0=R(0)$ la condición de contorno. $\mathfrak{B}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ se supone contínua y diferenciable con respecto a $\mathfrak{R}_t$.

De esta forma la elección de la estrategia óptima en futuros queda planteada como un problema de control dinámico estocástico univariante, siendo $\mathfrak{R}_t \in \mathbb{R}$ la variable de estado , $\vartheta_t \in \Xi(t)$ la variable de control y $\Xi(t)$ el conjunto admisible de controles. Para simplificar supondremos que el individuo no tiene que aportar saldo inicial y no tiene limite alguno en el volúmen de su posición, corta o larga, en el mercado de futuros, es decir, $\Xi(t)=\mathbb{R}$.

Supondremos que se cumplen las condiciones de regularidad para que la solución del problema (su función valor) sea única.[7] Escribiendo la función de utilidad indirecta:[8]

$$J(P_t, t, T) = \underset{\vartheta_t \in \mathbb{R}}{\text{máx}}\ E_t \int_t^T e^{-\eta s}\mathfrak{U}(\mathfrak{R}_s(\vartheta))ds \tag{9}$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) para este caso es:

$$0 = \underset{\vartheta \in \mathbb{R}}{\text{máx}} \left\{ e^{-\eta t}\mathfrak{U}(\mathfrak{R}_t(\vartheta)) + J_t + J_R\left[\rho'\alpha_t + r_t S_t(\vartheta) + \vartheta_t \pi_t\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} J_{RR}\left[\rho'\sigma_t + \vartheta_t \nu_t\right]\left[\rho'\sigma_t + \vartheta_t \nu_t\right]' \right\} \tag{10}$$

con condición de contorno tipo Dirichlet $J(\mathfrak{R}, T, T)=0$.

La solución ϑ de (10) debe satisfacer:

$$J_R \pi_t + J_{RR}\left[\rho'\sigma_t + \vartheta_t \nu_t\right]\nu'_t = 0$$

es decir,

$$\vartheta_t^* = \frac{J_R \pi_t}{J_{RR} \nu_t \nu_t'} - \frac{\rho' \sigma_t \nu_t'}{\nu_t \nu_t'} \tag{11}$$

El procedimiento usual de resolución de este tipo de problemas consiste en sustituir (11) en (10), y dada una forma para $\mathfrak{U}(.)$ resolver la ecuación en derivadas parciales resultante de (10) para $J(\mathfrak{R},t,T)$, y una vez obtenida esta, hallar sus derivadas J_R, J_{RR} y sustituirlas en (11) para obtener finalmente ϑ_t^{*}.[9]

No obstante, vamos a imponer que la función de utilidad sea CRRA (aversión relativa al riesgo constante) ya que tiene unas características que evitan tener que seguir el procedimiento anterior y resolver la ecuación en derivadas parciales muy no lineal que se obtiene.

Según una propiedad de separabilidad de las funciones CRRA se puede escribir (Merton, 1971):

$$J(\mathfrak{R}_t, t, T) = f(t,T)\mathfrak{B}(\mathfrak{R}_t(\vartheta_t), t) + g(t,T) \tag{12}$$

siendo f y g funciones determinísticas del tiempo. Para la función de utilidad tipo CRRA:

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{R}t, t) = \exp(-\eta t)\{\mathfrak{R}_t^{\gamma} - 1\}/\gamma,$$

la ecuación (12) se escribe:

$$-\frac{J_{RR}}{J_R}\mathfrak{R}_t = 1-\gamma \tag{13}$$

siendo $1-\gamma$ el parámetro de aversión relativa al riesgo.

Supongamos ahora que la economía está compuesta por I agentes con funciones de utilidad CRRA, carteras $\rho_i' \in \mathbb{R}^{MM}$, y niveles de riqueza individuales $\mathfrak{R}_t^i$, i=1,...,I. Entonces, teniendo en cuenta (12) y (13), (11) se escribe:

$$\vartheta_t^{i*} = \frac{\mathfrak{R}_t^i \pi_t}{(1-\gamma_i)\nu_t \nu_t'} - \frac{\rho_i' \sigma_t \nu_t'}{\nu_t \nu_t'} \tag{14}$$

La posición en futuros contratada por un individuo se descompone en un posición especulativa y una posición de cobertura (los dos componentes del lado derecho de (14), respectivamente)[10]. La posición especulativa se identifica como tal al ser larga/corta según que la prima de riesgo (π_t) sea positiva/negativa. Dicha posición es directamente proporcional al nivel de riqueza del individuo e inversamente proporcional a su grado de aversión relativa al riesgo y a la volatilidad del futuro financiero.

La posición de cobertura se caracteriza, por su parte, por ser de signo contrario al de la posición de riesgo del agente en los mercados al contado. La demanda individual de futuros con fines de cobertura es igual a la suma de las posiciones, cortas o largas, de cada activo multiplicadas por la "beta" del futuro financiero con respecto a cada activo al contado respectivo.

La demanda de futuros con fines de cobertura no depende, entonces, del volúmen de las posiciones totales netas en los mercados "spot" sino de la suma de las mismas ponderadas por sus respectivas volatilidades con respecto al instrumento de futuros. De esta forma, pueden existir individuos muy aversos al riesgo con posiciones al contado abiertas y con demanda nula de futuros financieros con fines de cobertura.

Imponiendo la condición de vaciado de mercado, esto es,

$$\sum_{i=1}^{I} \vartheta_t^{i*} = 0 \qquad \forall t \in [0,T]; \tag{15}$$

y sumando (11) para todos los agentes e igualando a 0 se obtiene la deriva del proceso de F_t compatible con el vaciado de mercado:

$$\pi_t = \frac{\hat{C}}{\Re_t^A} \sum_{i=1}^{I} \rho_i' \sigma_t \nu_t' = \frac{\hat{C}}{\Re_t^A} \sum_{i=1}^{I} \rho_i' \operatorname{cov}(dF_t, dP_t) \tag{16}$$

Siendo $\hat{C}$ la media armónica ponderada de los coeficientes de aversión relativa al riesgo de los I agentes de la economía, y siendo $\Re^A_t$ la riqueza agregada en $t\in[0,T]$.Para la función de utilidad logarítmica ($\lim \gamma_i \Rightarrow 0\ \forall i\in I$), [16] tiene la forma:

$$\pi_t = \frac{1}{\Re^A_t} \sum_{i=1}^{I} \rho'_{it}\sigma_t \nu'_t \tag{17}$$

Siendo $\Re^A_t$ la riqueza agregada en t. Sustituyendo ahora [16] en [14]

$$\vartheta^{j*}_t = \frac{\hat{C}}{C_j \Re^A_t} \sum_{i=1}^{I} \frac{\rho'_i \sigma_t \nu'_t}{\nu_t \nu'_t} - \frac{\rho'_j \sigma_t \nu'_t}{\nu_t \nu'_t} \tag{18}$$

obtenemos la demanda de futuros óptima de un agente $j\in I$, con CARRA C_j.

$$\vartheta^{j*}_t = r_{jt} \sum_{i=1}^{I} \frac{\rho'_i \sigma_t \nu'_t}{\nu_t \nu'_t} - \frac{\rho'_j \sigma_t \nu'_t}{\nu_t \nu'_t} \tag{19}$$

En (19) se particulariza el resultado para el caso logarítmico, donde r_{jt} representa la participación en t del agente j en la riqueza total. El tratamiento del caso logarítmico tiene especial interés ya que su interpretación es más sencilla que la del caso general. La posición especulativa dependerá, en el caso logarítmico, de forma directamente proporcional de la participación del individuo en la riqueza total agregada en cada período (ver, sin embargo, la discusión de la nota 11).

Puede observarse en (18) cómo la posición especulativa total se repartirá entre los agentes de forma proporcional al volúmen total de riesgo abierto en los mercados al contado y de forma inversamente proporcional a la aversión absoluta al riesgo del indivíduo en relación a la aversión absoluta al riesgo "del mercado" ($I\hat{C}$). Hay que notar que este cociente de coeficientes de aversión al riesgo no es independiente de la distribución de la riqueza entre los agentes. De nuevo el caso logarítmico es más ilustrativo al mostrar la dependencia de la distribución de la riqueza en la demanda especulativa de futuros: esta será, en principio, mayor cuanto mayor sea la participación del agente en la riqueza total[11].

Ahora bien, si $\sum_{i=1}^{I} \rho'_i = 0 \in \mathbb{R}^M$ las demandas de activos financieros distintos al futuro financiero se compensan (todo activo financiero de un agente es pasivo financiero de otro agente) y dicho futuro financiero es una martingala ($\pi_t=0, \forall t$): Si no existen activos reales en la economía[12] (que no son pasivos de ningún agente), o bien en el supuesto menos restrictivo de que todos los activos correlacionados con el futuro financiero se encuentran en oferta neta nula, entonces necesariamente $\sum_i \rho'_i = 0 \in \mathbb{R}^M$ en equilibrio. En este caso, la rentabilidad esperada instantánea es cero y puede entonces interpretarse que el hecho de que todas las posiciones spot encuentren contrapartida hace inecesario que el futuro financiero atraiga a especuladores. Este es un resultado bastante común en los modelos de cobertura (futures hedging models).

Si por el contrario $\sum_i \rho'_i \geq 0$, entonces puede interpretarse que en equilibrio el precio del futuro financiero ofrece rentabilidad esperada positiva para atraer contrapartidas que tomen posiciones largas frente a las posiciones cortas que toman los inversores spot para cubrir sus inversiones en activos al contado. Si el sumatorio anterior es menor que cero, entonces hay que atraer posiciones especulativas cortas, con lo cual, para que la rentabilidad esperada de tomar una posición corta descubierta sea positiva, la prima de riesgo o deriva del proceso estocástico que sigue el precio del futuro financiero debe ser negativa.

No obstante, la evidencia empírica tiende a rechazar los modelos de cobertura al detectarse periodos de tiempo en los cuales las coberturas largas y cortas prácticamente se compensan ("net hedging pressure" nulo) y sin embargo no se rechaza que la prima de riesgo observada sea distinta de cero cuando, en este caso, los modelos de cobertura predecirían una prima de riesgo nula[13]. Este fenómeno podría justificarse en el modelo desarrollado más arriba, en el sentido que posiciones abiertas al contado pequeñas en volúmen tengan gran influencia en la determinación de la prima de riesgo al ser el futuro muy volátil con respecto a estos activos de contado. No obstante, el apartado siguiente amplia el modelo para permitir la posibilidad de que la prima de riesgo del futuro sea no nula en una economía con posiciones al contado exactamente compensadas, con agentes con preferencias idénticas y creencias homogeneas.[14]

3. Un modelo del mercado de futuros en una economía caracterizada por procesos de salto-difusión:

El hecho que la realidad pueda ser explicada por una mezcla de procesos continuos y saltos discretos en las variables es ampliamente reconocida en la literatura. Reescribamos los procesos (1), (2) y (3) para el proceso del activo contingente, del futuro financiero y del tipo de interés spot introduciendo en las ecuaciones diferenciales estocásticas procesos de Poisson, con una probabilidad de que se produzca un salto discreto en t determinada, y en caso de producirse, la amplitud del salto siga una densidad determinada. La realización de la amplitud del salto influirá en el proceso original a través de un coeficiente determinado. Dichos procesos permiten captar sucesos "raros" (asociados por ejemplo a variaciones discretas y repentinas del conjunto de información relevante) que generan discontinuidades en la senda de los precios de los activos, y se escriben de la forma siguiente[15]:

$$dP_t = \alpha_t dt + \sigma_t dz_t + \delta_t dy_t \tag{20}$$

$$dF_t = \pi_t dt + \nu_t dz_t + \gamma_t dy_t \tag{21}$$

$$dr_t = \beta(r_t, t)dt + \omega(r_t, t)dz_t + \psi_t dy_t \tag{22}$$

donde dz_t es el proceso de Wiener anterior y dy_t es un proceso de Poisson con intensidad λ (la probabilidad que ocurra un salto entre t y $t+\Delta t$ es $\lambda h+o(h)$, siendo $h=\Delta t$).[16] δ_t, γ_t y ψ_t son procesos con dominio de definición real, Mx1 dimensional, el primero, y unidimensionales el resto. Además se suponen integrables, predecibles y adaptados a la filtración de cada agente. Evidentemente estos tres procesos representan la incidencia de un salto de la variable y_t de una magnitud determinada en la variación del precio de cada activo financiero respectivo.

La variación en el saldo que mantiene el individuo con la cámara de contratación es, al igual que antes:

$$S_t(\vartheta) = \int_0^t e^{rs(t-s)}\vartheta s dFs \tag{23}$$

Aplicando el lema de Itô multidimensional para procesos de salto-difusión a (23), obtenemos[17]

$$dS_t(\vartheta) = \left[r_t S_t(\vartheta) + \vartheta_t \pi_t\right]dt + \vartheta_t \nu_t dz_t + \vartheta_t \gamma_t dy_t \tag{24}$$

Según la fórmula generalizada de Itô tendremos, en este caso, que la deriva del proceso, tal como está escrita, no coincide con la esperanza instantánea del proceso condicionada al instante inmediatamente anterior, tal como sucede en los procesos de difusión. En este caso se tendrá:

$$E_t \Delta S_t(\vartheta) = r_t S_t(\vartheta) + \vartheta_t \pi_t + \lambda\left[\int\int_{a\in I}\left[S_t(\vartheta, r_t+\psi_t a, F_t+\gamma_t a) - S_t(\vartheta, r_t, F_t)\right]p(a)da\right] \tag{25}$$

donde el término adicional representa la esperanza del salto en S_t, derivado de la amplitud del salto de y_t. Dicha amplitud se representa mediante la variable "a" que es una variable aletoria O(1) con densidad $p(a;P,t)=p(a)$ -que supondremos estacionaria- y dominio de definición real $I\subseteq\mathbb{R}$.

Evaluando (25),

$$S_t(\vartheta, r_t+\psi_t a, F_t+\gamma_t a) - S_t(\vartheta, r_t, F_t) = \vartheta_t(dF_t | dy_t=1) +$$

$$\lim_{h\Rightarrow 0}\int_0^{t-h} e^{rs(t-h-s)}\vartheta s dFs - \vartheta_t(dF_t | dy_t=0) - \lim_{h\Rightarrow 0}\int_0^{t-h} e^{rs(t-h-s)}\vartheta s dFs =$$

$$= \vartheta_t \left[(dF_t | dy_t = 1) - (dF_t | dy_t = 0) \right] = \vartheta_t \gamma_t a_t \tag{26}$$

donde a_t es la amplitud del salto en t y ya que $P(dy_t > 1) = o(dt)$ es despreciable en el límite cuando $dt \longrightarrow 0$. Entonces sustituyendo en (25) obtenemos:

$$E_t \Delta S_t(\vartheta) = r_t S_t(\vartheta) + \vartheta_t \pi_t + \vartheta_t \lambda \gamma_t E(a) \tag{27}$$

Hallamos ahora el proceso que sigue la riqueza financiera del individuo, de forma análoga a la ecuación (5) anterior,

$$d\Re_t = \left[\rho' \alpha_t + r_t S_t(\vartheta) + \vartheta_t \pi_t \right] dt + \left[\rho' \sigma_t + \vartheta_t \nu_t \right] dz_t$$

$$+ \left[\rho' \delta_t + \vartheta_t \gamma_t \right] dy_t \tag{28}$$

Vamos a aplicar el principio del máximo para resolver (7) sujeto a (28). El método de resolución es similar al caso del proceso de difusión puro. La ecuación de HJB para este caso es:

$$0 = \max_{\vartheta \in \mathbb{R}} \left\{ e^{-\eta t} \mathfrak{U}(.) + J_t + J_R \left(\rho' \alpha_t + r_t S_t + \vartheta_t \pi_t \right) + \right. \tag{29}$$

$$+ \frac{1}{2} J_{RR} \left(\rho' \sigma_t + \vartheta_t \nu_t \right) \left(\rho' \sigma_t + \vartheta_t \nu_t \right)' +$$

$$+ \lambda \left[\int_{a \in I} J\left(\Re_t + [\rho' \delta_t + \vartheta_t \gamma_t] a, t, T\right) - J(\Re, t, T) \right] p(a) da \Bigg\}$$

sujeta a la condición de contorno $J(\Re, T, T) = 0$. Ahora, expandiendo el integrando del último término obtenemos[18]:

$$\int_{a \in I} \left[J\left(\Re_t + [\rho' \delta_t + \vartheta_t \gamma_t] a, t, T\right) - J(\Re_t, t, T) \right] p(a) da \simeq$$

$$\int_{a \in I} \left[\left[\rho' \delta_t + \vartheta_t \gamma_t \right] J_R \, a + \frac{(\rho' \delta t + \vartheta t \gamma t)^2}{2} J_{RR} \, a^2 \right] p(a) da =$$

$$= \left[\rho' \delta_t + \vartheta_t \gamma_t \right] J_R E(a) + \frac{(\rho' \delta t + \vartheta t \gamma t)^2}{2} J_{RR} \, E(a^2) \tag{30}$$

que sustituido en la ecuación HJB resulta:

$$0 = \max_{\vartheta \in \mathbb{R}} \Bigg\{ e^{-\eta t} \mathfrak{U}(.) + J_t + J_R \left(\rho' \alpha_t + r_t S_t + \vartheta_t \pi_t \right) + \tag{31}$$

$$+ \frac{1}{2} J_{RR} \left[\rho' \sigma_t + \vartheta_t \nu_t \right] \left[\rho' \sigma_t + \vartheta_t \nu_t \right]' +$$

$$+ \lambda \left[\rho' \delta_t + \vartheta_t \gamma_t \right] J_R E(a) + \frac{\lambda (\rho' \delta t + \vartheta t \gamma t)^2}{2} J_{RR} E(a^2) \Bigg\}$$

a resolver sujeta a la condición de contorno $J(R, T, T) = 0$.

Las condiciones de primer orden en (31) junto al resultado conocido $J_R/J_{RR}=-\Re_t^j/(1-\gamma_j)$ permiten resolver para ϑ_t^*;

$$\vartheta_t^* = -\frac{J_R}{J_{RR}}\left[\frac{\pi t + \lambda\gamma t E(a)}{\nu_t\nu_t' + \lambda\gamma_t^2 E(a^2)}\right] - \left[\frac{\rho'\sigma_t\nu_t' + \lambda\rho'\delta t E(a^2)\gamma\tau_t}{\nu_t\nu_t' + \lambda\gamma_t^2 E(a^2)}\right] \qquad (32)$$

es decir,

$$\vartheta_t^j = \frac{\Re_t^j}{(1-\gamma_j)}\left[\frac{\pi t + \lambda\gamma t E(a)}{\nu_t^2 + \lambda\gamma_t^2 E(a^2)}\right] - \left[\frac{\rho_j'\sigma t\nu t + \lambda\rho_j'\delta t E(a^2)\gamma_t}{\nu_t^2 + \lambda\gamma_t^2 E(a^2)}\right] \qquad (33)$$

imponiendo la condición de vaciado del mercado de futuros financieros, $\sum_{i=1}^{I}\vartheta_t^{i*}=0$ obtenemos la deriva del proceso dF_t en equilibrio,

$$\pi_t = \frac{\hat{C}}{\Re_t^A}\left[\sum_{i=1}^{I}\rho_i'\left(\sigma_t\nu_t' + \lambda\delta_t E(a^2)\gamma_t\right)\right] - \lambda\gamma_t E(a) \qquad (34)$$

sustituyendo en (33), resulta: (33)

$$\vartheta_t^{j*} = \frac{1}{\nu_t\nu_t' + \lambda\gamma E(a^2)}\left[\frac{\hat{}}{C_j\Re_t}\sum_{i=1}^{I}\rho_i' - \rho_j'\right]\left(\sigma_t\nu_t' + \lambda\delta_t E(a^2)\gamma_t\right)$$

Particularizando para la función de utilidad logarítmica,

$$\vartheta_t^j = \frac{1}{\nu_t\nu_t' + \lambda\gamma E(a_t^2)}\left[r_{jt}\sum_{i=1}^{I}\rho_i' - \rho_j'\right]\left(\sigma_t\nu_t' + \lambda\delta_t E(a^2)\gamma_t\right) \qquad (34)$$

Si $E(a)=E(a^2)=0$, ó bien $\lambda=0$, entonces (33) y (34) se reducen a (18) y (19), respectivamente. contrario, aunque todas las posiciones al contado se compensen, el futuro financiero no es, necesariamente, una martingala y su prima de riesgo es no nula.

La prima de riesgo descuenta la magnitud del "salto" esperado para compensar la ganancia esperada de un especulador (si el futuro aumenta su precio bruscamente en respuesta a un suceso extraordinario, la prima de riesgo descuenta negativamente la ganancia esperada y viceversa). Aunque todas las posiciones al contado se compensen exactamente ($\sum_i \rho'_i = 0 \in \mathbb{R}^M$), el precio del futuro no será una martingala siempre que $\lambda, \gamma, \dot{E}(a) \neq 0$. Por ejemplo, en una economía sin activos reales o en la cual los activos correlacionados con el futuro financiero están en oferta neta nula, los futuros financieros se comportarán como una martingala salvo que existan shocks en la economía que introduzcan discontinuidades en la trayectoria del precio del futuro.

De forma similar al caso de difusión pura, la posición mantenida en futuros equivale, para cada agente y en el caso logarítmico, a la diferencia entre el producto de la participación en la riqueza agregada del agente y el volúmen total de riesgo abierto en los mercados al contado, con el volúmen de riesgo al contado del agente, todo ello descontado por un factor decreciente en la volatilidad del futuro (en difusión-γ^2-y salto-$E(a^2)$-). Dicha posición tambien puede dividirse, como en el caso de difusión pura, en un componente especulativo (primer término del lado derecho de (33)) y otro de cobertura (segundo término).

4. Conclusiones:

En una economía dinámica con un número finito de agentes con preferencias CRRA, información y mercados completos (ver apéndice) y formación de expectativas homogeneas, la demanda de contratos de futuros individual será en parte especulativa pura y en parte derivada de la voluntad de cubrir las carteras de activos al contado.

Si las carteras de activos al contado se mantienen constantes, el componente especulativo puro será, en el caso logarítmico, directamente proporcional a la participación del agente en la riqueza agregada, y también a la volatilidad del precio del contrato de futuros con respecto a su cartera de activos al contado. Asimismo, dicho componente será mayor cuanto mayor sea el desajuste de las carteras al contado de los agentes.

El componente de cobertura pura será igual en volúmen pero de signo contrario al riesgo global de su cartera de activos al contado, medido este último por la covarianza del precio del contrato de futuros con su cartera de activos al contado. Si un agente es, en términos netos, especulador o "hedger" dependerá del componente que prime, es decir, de su grado de aversión relativa al riesgo y de la composición de su cartera de activos al contado.

La prima de riesgo del contrato de futuros dependerá positivamente del grado en que las carteras al contado se compensen entre sí (es decir, del riesgo total agregado de los mercados al contado), pero la existencia de perturbaciones en la economía que provoquen discontinuidades en los precios de los activos de la economía añadirán un componente a la prima de riesgo aún cuando los mercados al contado estén exactamente compensados (riesgo agregado nulo). En este caso, la prima de riesgo descontará exactamente la magnitud del salto esperado, no habrá especulación pura y sólo se ofrecerán y demandarán contratos con fines de cobertura. De esta forma el contrato de futuros, a través de una prima de riesgo no nula, compensará a los agentes cuyas necesidades de cobertura requieran una posición a futuros potencialmente desfavorable con respecto al sentido del salto en el futuro financiero (corta/larga si se espera un salto discreto al alza/baja).

El resultado del párrafo anterior enriquece la información que puede extraerse de la magnitud de la divergencia del proceso que sigue el precio del futuro financiero respecto a una martingala. Por ejemplo, en el caso del contrato de futuros sobre tipos de cambio, por la gran profundidad del mercado puede pensarse que las posiciones largas y cortas al contado de los agentes que contratan en el mercado de futuros están prácticamente compensadas. Esto es así por que los arbitrajistas de paridad cubierta de tipos de interés cubren sus posiciones en el mercado a plazo y no en el de futuros, y los agentes que especulan sobre la paridad descubierta no cubren sus posiciones ni a plazo ni en el mercado de futuros. Supongamos además que el tipo de cambio bilateral entre dos monedas se inserta en unas bandas de fluctuación. Entonces, si el precio del futuro sobre tipo de cambio tiende a comportarse como una submartingala puede inferirse que el mercado espera un realineamiento con probabilidad no nula.

En este trabajo se han derivado resultados de interés económico sobre la naturaleza del equilibrio en el mercado de futuros en una economía con mercados completos y contratación continua, y sobre las primas de riesgo de los precios en dicho equilibrio, pero no se ha investigado la naturaleza de ciertos aspectos cruciales, como los coeficientes de difusión y de salto-difusión (jump-diffusion) del futuro financiero en relación al conjunto exógeno de activos subyacentes. El supuesto de mercados completos ha evitado la necesidad de tratar temas tales como la asignación intertemporal del consumo ó la valoración del conjunto de activos "primitivos", para estudiar el mercado de futuros en equilibrio parcial. Probablemente el reto teórico más importante consista en modelizar la economía y derivar métodos de valoración cuando los productos de la innovación financiera no sean activos redundantes. No obstante, todavía no se dispone de una teoría general clara y establecida sobre mercados financieros incompletos.

APENDICE. Existencia de un equilibrio general subyacente.

El modelo del mercado de futuros presentado se desarrolló en equilibrio parcial en una economía caracterizada por activos financieros cuyos precios siguen procesos de difusión, agentes con preferencias CRRA e información completa. En dicha economía se supuso que los mercados eran completos antes de la introducción del contrato a futuros, lo cual permitió desarrollar el modelo en equilibrio parcial. En este apéndice se desarrollan las condiciones que el vector de precios de los activos al contado y el tipo de interés instantaneo deben satisfacer para que la asignación de equilibrio sea la misma antes y después de la introducción del contrato de futuros. Es decir, cabe preguntarse si las nuevas condiciones que existirán en la economía después de la introducción de dicho mercado afectarán el propio equilibrio general, del que se partía como premisa.

Para desarrollar estas condiciones, se modificará ligeramente la especificación de los procesos estocásticos y se introducirán activos reales, para facilitar la comparación de los resultados con otros trabajos de la literatura (especialmente el renovador trabajo de Cox, Ingersoll y Ross, 1985a y 1985b.

Se recordará que en el modelo existían M activos contingentes caracterizados por un proceso de difusión M-dimensional:

$$dP_t = [\beta_t P_t - \delta_t]dt + I_M P_t H_t dZ_t \tag{1}$$

siendo dZ_t un vector Kx1 de procesos de Wiener que representan las fuentes de incertidumbre de la economía, P_t el vector de precios de equilibrio de M activos contingentes, β_t una matriz diagonal MxM de rentabilidades instantáneas, δ_t un vector Mx1 de flujos de caja instantáneos, I_M una matriz identidad de dimensión M y H_t una matriz MxK de coeficientes de difusión. CIR llegan a una expresión de equilibrio para β_t y H_t, a la vez que determinan la composición óptima de la cartera de los individuos.

Al considerar el problema de asignación de riqueza del individuo, el problema de selección de cartera no tiene, en general, solución única, debido a la existencia de infinitos activos contingentes. No obstante, el problema puede resolverse escogiendo un conjunto "base" de oportunidades de inversión (incluyendo tanto la inversión directa en procesos productivos como en activos contingentes). Esta base se define como el conjunto de procesos productivos y activos contingentes caracterizados por procesos de difusión multivariante (1) para K activos contingentes de la base, y para p procesos productivos cuyas rentabilidades siguen el proceso:

$$d\eta_t = I_\eta^p \alpha(Y,t)dt + I_\eta^p G(Y,t)dZ_t \tag{2}$$

siendo $p \leq n$ -número de procesos físicos existentes-, $\alpha(Y,t)$ un vector px1 de derivas, función de las fuentes de incertidumbre Y, siendo G(Y,t) una matriz nx(n+k) de funciones de (Y,t) con dominio real (GG' es la matriz de covarianzas del proceso de difusión multivariante (2)), dZ_t es un proceso de Wiener (n+k)-dimensional. Para simplificar supondremos que todos los procesos físicos pertenecen a la base (p=n).

Según Cox, Ingersoll y Ross, (1985a, pág.368), "It is sufficient for both individual choice and equilibrium valuation to determine the unique allocation resulting when the opportunity set is restricted to the basis. Any allocation involving nonbasis claims could be replicated by a controlled portfolio of claims in the basis. Since any of these choices would give the individual the same portfolio behavior over time and the same consumption path, he would be indifferent among them. In this scheme of things there is no reason for nonbasis contingent claims to exist, but there is no reason for them not to exist either, and we may assume that in general there will be an inifinite number of them, each of which must be consistently priced in equilibrium".

Esto se utilizará para resolver el equilibrio parcial,cuando se introduce un mercado de futuros,de forma consistente con el equilibrio general. Para ello cabe establecer el siguiente teorema:

Teorema: Una condición necesaria y suficiente para la existencia de la base es que la matriz de dimensión (n+k+1):

$$A(Y,t) = \begin{bmatrix} r_t & 0^{(n+k)} \\ (F\beta-\delta) & H(Y,t) \\ \alpha(Y,t) & G(Y,t) \end{bmatrix}$$

no sea singular.

Prueba:

Supongamos cualquier activo financiero de la economía no perteneciente a la base, cuyo precio tiene diferencial:

$$dP_t = \mu(Y,t)dt + \sigma(Y,t)dz(t) \tag{3}$$

siendo $\sigma(Y,t)$ un vector de (n+k) funciones con dominio real, $\mu(Y,t)$ una función con dominio real y dz_t el proceso de Wiener multidimensional (n+k)x1.

Si un agente puede replicar este activo financiero con una cartera formada con los activos de la base y al activo sin riesgo (que es un activo financiero con coeficiente de difusión cero y diferencial $dP_t^{sr}=P_t^{sr}r_t$), deberá existir $\rho(Y,t)\in\mathbb{R}^{(n+k+1)}$ tal que:

$$dP_t = dPR_t \qquad \text{con probabilidad 1, } \forall t. \tag{3}$$

dónde $PR_t = \rho' B(Y,t)$, $B(Y,t)'=[P_t^{sr} F\ \eta]$, es la cartera que replica P_t. Aplicamos el lema de Itô multidimensional a PR_t obteniendo:

$$dPR_t = \sum_{j=1}^{n+k+1} \rho_j(Y,t)A_{1j}(Y,t)dt + \left[\sum_{j=1}^{n} \rho_j(Y,t)G_j(Y,t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=n+1}^{n+k} \rho_j(Y,t)h_j(Y,t)\right]dz_t$$

siendo $\{A_{1j}\}_{j=1}^{n+k+1}$ la primera columna de $A(Y,t)$, $G_j(Y,t)$ los n vectores fila (n+k) de $G(Y,t)$ y $h_j(Y,t)$ los k vectores fila (n+k) de $H(Y,t)$.

Si (4) se cumple, entonces deberá cumplirse:

$$\begin{bmatrix} \mu(Y,t) \\ \sigma'(Y,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_t & (F\beta-\delta) & \alpha(Y,t) \\ 0^{(n+k)} & H & G \end{bmatrix} \rho(Y,t) = A'(Y,t)\rho(Y,t)$$

pero esto es cierto si y sólo si rang$A(Y,t)$=n+k+1 Q.E.D.■

Una vez establecido este teorema, realicemos las siguientes hipótesis:

H1. La matriz básica tiene rango igual o superior al número de fuentes de incertidumbre de la economía más uno (los mercados son completos).

H2. En la economía existe un futuro financiero, marked-to-market, que no pertenece a la base ∀t.

El futuro financiero puede entonces replicarse dinámicamente con los activos reales y financieros de la base, con lo cual su existencia no viene a ampliar el conjunto de oportunidades de inversión de un agente con acceso a todos los activos de la base. Consiguientemente la introducción de un mercado de futuros financieros no varia la composición de la cartera de (n+k+1) activos básicos, bajo H1 y H2.

El precio del futuro financiero deberá ser consistente con el equilibrio general de la economía, y consecuentemente deberá resolver las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio del modelo. La introducción de caracteristicas adicionales (market-basket-delivery) imposibilitan al resolución analítica del precio de equilibrio por esta via. No obstante, H1 y H2 permiten caracterizar el proceso estocástico del precio del futuro financiero y las estrategias de actuación de los agentes en dicho mercado resolviendo el problema en equilibrio parcial de forma consistente con el equilibrio general (tomando como fija la composición de la cartera básica).

NOTAS

---

[1]Para más detalles sobre la topología de los procesos de Itô, ver Williams (1979).

[2]En adelante se supondrá que todos los procesos estocásticos especificados son medibles en $(\Omega,\mathbb{F},\mathbb{P})$ $\forall t\in[0,T]$ e integrables respecto a la medida de Lebesgue.

[3]Al ser los mercados completos, el nuevo activo financiero no alterará la asignación real escogida por los inversores: El nuevo activo financiero siempre podrá ser replicado por un conjunto de activos linealmente independientes que forman la "base" que expande todas las oportunidades de inversión de la economía. No obstante, aunque no hay ninguna razón por la que el nuevo activo (redundante) deba existir, tampoco hay razón alguna para que no exista. Ver el apéndice.

4

$$\int_0^t e^{rs(t-s)} \vartheta s dFs = \vartheta_t dF_t + \lim_{h\to 0} \int_0^{t-h} e^{rs(t-s)} \vartheta s dFs$$

[5]La posición al contado en el activo m será corta o larga según $\rho_m<0$ o $\rho_m>0$, $\rho=(\rho_1,..\rho_m,..\rho_M)$, respectivamente. De forma similar la posición de un individuo en el mercado de futuros será corta o larga según $\vartheta<0$ o $\vartheta>0$, respectivamente.

[6]Cabe observar que las operaciones de inversión/endeudamiento a tipos de interés sin riesgo quedan recogidas en la cartera $\rho'\in\mathbb{R}^M$ mediante la compra ó emisión de bonos "cupón cero".

[7]La deriva y el coeficiente de difusióndel proceso (19) deben ser contínuas en todos sus argumentos, además de la propia función de utilidad. Además la deriva y el coeficiente de difusión deben cumplir la condición de crecimiento y deben ser funciones Lipschianas. Por último, la condición de contorno es contínua y satisface la condición de crecimiento (ver D.Duffie,1988,p.225).

[8] $J: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función valor (el valor máximo de la función objetivo para un problema de control óptimo que empieza en t en el estado $\bar{x}_t$). Bajo las condiciones de regularidad supuestas (ver más arriba), dicha función existe, es única y $J \in C^2$.

[9] Para una discusión sobre el tipo de ecuaciones diferenciales parciales que se aparecen en los problemas de control óptimo estocástico, ver Bensoussan (1982).

[10] Anderson y Danthine (1981) obtienen una descomposición similar en un modelo puro de cobertura.

[11] Este pequeño análisis de estática comparativa debe tomarse con cautela, ya que la cartera de activos al contado, ρ_i, se considera dada, y esta en realidad podría depender de forma no lineal de la participación del agente en la riqueza agregada.

[12] Por ejemplo, una economía de intercambio puro.

[13] Ver Raynauld and Tessier (1984), Peck (1980 y 1982).

[14] Anderson y Danthine (1981) justifican primas de riesgo no nulas con demanda neta de cobertura nula por la disparidad de preferencias y/o expectativas de los agentes.

[15] Puede demostrarse que la distribución asintótica de P, F y r en (18), (19) y (20) es idéntica a la de un proceso estocástico que sea suma directa de un proceso de difusión y otro de salto puro. Para el análisis de estos procesos mixtos ver Cox y Miller (1968), págs. 237-246.

[16] $dy(t)=0$ con probabilidad $1-\lambda dt+o(dt)$, $dy(t)=1$ con probabilidad $\lambda dt+o(dt)$ y $dy(t)=N$, $N>1$ con probabilidad $o(dt)$.

[17]Sea $dx=c(x,t)dt + A(x,t)dZ + B(x,t)dY$ un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas con dZ un vector de procesos de Wiener y dY un vector de procesos de Poisson independientes. Sea F(x,t) una función dos veces diferenciable en (x,t). Entonces:

$$dF = \left[F_t(x,t) + F_x(x,t)c(x,t) + \frac{1}{2}tr(F_{xx}(x,t)A(x,t)A'(x,t))\right]dt$$

$$+ \left[F_x(x,t)A(x,t)\right]dZ + \left[F(x+B(x,t),t)-F(x,t)\right]dY$$

para el caso bidimensional de (21) obtenemos el resultado del texto.

[18]Dicha expansión es una aproximación y no supone que los momentos de a_t de orden superior a 2 sean asintóticamente despreciables.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Anderson, R.W. y Danthine, J.P.:"Cross Hedging", Journal of Political Economy, 89,1981, págs.1182-1196.

——————————:"Hedger Diversity in Futures Markets", Economic Journal,93,1983, págs.370-389.

Bensoussan, A.:"Stochastic Control by Functional Analysis Methods", North-Holland, Amsterdam,1982.

Bodie, Z. y Rosansky, J.:"Risk and Return in Commodity Futures", Financial Analysts Journal,36,1980, págs.27-39.

Breeden, D.T.:"An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities", Journal of Financial Economics,35, 1979, págs 503-520.

——————:"Consumption Risk in Futures Markets", Journal of Finance, 35, 1980, págs.505-525.

Carter, C.A., Rausser, G.C., y Schmitz, A.:"Efficent Asset Portfolios and the Theory of Normal Backwardation"", Journal of Political Economy,91, 1983, págs.319-331.

Cootner, P.H.:"Returns to Speculators: Telser versus Keynes" Journal of Political Economy , 68, 1960, págs. 396-404.

——————:"Speculation and Hedging", Food Research Institute Studies, 7, 1967, Suplemento págs.65-106.

Cornell, B.:"The Consumption Based Asset Pricing Model: A Note on Potential Tests and Applications", Journal of Financial Economics,9, 1977, págs.103-108.

Cox, J.C., Ingersoll, J.E.Jr. y Ross, S.A.:"An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", Econometrica, 53, 1985a, págs.

——————————————:"A theory of the Term Structure of Interest Rates":Econometrica, 53, 1985b, págs.

Cox, D.A. y Miller, M.D.:"The Theory of Stochastic Processes", Wiley Ed., NY, 1968.

Duffie, D.:"Security Markets. Stochastic Models", Prentice Hall, NY, 1988.

————:"Futures Markets", Prentice Hall, NY, 1989.

Duffie, D. y Jackson, M.:"Optimal Hedging and Equilibrium in a Dynamic Futures Market", Journal of Economic Dynamics and Control, 14, 1990.

Dusak, K.:"Futures Trading and Investors Returns: An Investigation of Commodity Market Risk Premium", Journal of Political Economy, 81, 1973, págs. 1387-1406.

Fama, E.:"Forward Rates as Predictors of Futures Spot Rates", Journal of Financial Economics, 3, 1976, págs. 361-377.

Friedman, B.:"Interest Rate Expectations versus Forward Rates: Evidence from an Expectations Survey", Journal of Finance, 34, 1979, págs. 965-973.

Grauer, F.L.A.:"Equilibrium in Commodity Futures Markets: Theory and tests", PhD. Dissertation, Stanford University, 1977.

Grauer, F.L.A. y Litzemberger, R.H.:"The Pricing of Commodity Futures Contracts, Nominal Bonds and Other Risky Assets Under Commodity Price Uncertanty", Journal of Finance, 34, 1979, págs. 69-83.

Gray, R.W.:"The Characteristic Bias in some Thin Futures Markets", Food Research Institute Studies, 1, 1960, págs 296-312.

———————:"The Search for a Risk Premium", Journal of Political Economy, 69, 1961. págs.250-260.

Hansen, L. y Hodrick, R.:"Forward Exchange Rates as Optimal Predictors of Future Spot Rates: An Econometric Analysis", JOurnal of Political Economy, 88, 1980, págs 829-853.

Hodrick, R. y Srivastava, S.:"An Investigation of Risk and Return in Forward Foreign Exchange", Journal of International Money and Finance,3, 1984, págs. 5-29.

Houthakker,H.S.:"Restatement of the theory of Normal Backwardation" Cowles Fundation Discussion Paper, 44, 1957a.

——————————:"Can Speculators Forecast Prices?":Review of Economics and Statistics,39, 1957b, págs. 143-151.

Jackson, M.:"Market Efficency and the Return on Gold Futures" Mimeo, Graduate School of Business, 1986, Stanford University.

Keynes, J.M.:"A Treatise on Money" vol. II "The Applied Theory of Money", Macmillan and Company, London, 1930.

Korajczyk, R.:"The Pricing of Forward Contracts for Foreign Exchange", Journal of Political Economy, 93,1985, págs.346-368.

Lintner, J.:"Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification", Journal of Finance, 20, 1965, págs.587-615.

Merton, R.:"Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continious-Time Model", Journal of Economic Theory, 3, 1971, págs. 373-413.

Miracle, D.S.: "The Egg Futures Market: 1940 to 1966" Food Research Institute Studies, 11, 1972, págs. 269-292.

Peck, A.: "Reflections of Hedging on Futures Markets Activity" Food Research Institute Studies, 17, 1980, págs. 327-349.

———: "Estimation of Hedging and Speculative Positions on Futures Markets Revisited", Food Research Institute Studies, 18, 1982, págs. 181-195.

Rajamaran, I.: "Testing the Rationality of Futures Markets for Selected LDC Agricultural Exports", Journal of Futures Markets, 6, 1986, págs. 523-540.

Raynauld, J. y Tessier, J.: "Risk Premium in Futures Markets: An Empirical Investigation", Journal of Futures Markets, 4, 1984, págs. 189-211.

Richard, S.F. y Sundaresan, M.: "A Continious Time Equilibrium Model of Commodity Prices in a Multigood Economy", Journal of Financial Economics, 9, 1981, págs. 347-371.

Rockwell, C.S.: "Normal Backwardation, Forecasting and the Returns to Commodity Futures Traders", Food Research Institute Studies, 7, 1967, págs. 107-130.

Serrat, A.: "Modelización de la estructura intertemporal de tipos de interés en equilibrio general", DOC. 9006, CEMFI, 1990a.

Serrat, A.: "Valoración de activos derivados de tipos de interés en equilibrio general: futuros, opciones y opciones sobre futuros", DOC 9007, CEMFI, 1990b.

Sharpe, W.:"Capital Asset Prices: A theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", Journal of Finance, 19, 1964, págs.425-442.

Stein, J.L.: "Spot, forward and futures", Research in Finance, vol.I, 1979, págs.225-310.

Telser,L.:"Futures Trading and the Storage of Cotton and Wheat" Journal of Political Economy, 66, 1958, págs.233-255.

————:"Returns to Speculators: Telser versus Keynes. A Reply", Journal of Political Economy, 68, 1960, págs.404-415.

————:"Margins and Futures Contracts" Journal of Futures Markets, 1, 1981, págs.225-253.

Williams, D.:"Diffussions, Markov Processes and Martingales" vol.1, Wiley, NY. 1979.

DOCUMENTOS DE TRABAJO (1)

8801 **Agustín Maravall:** Two papers on ARIMA signal extraction.

8802 **Juan José Camio y José Rodríguez de Pablo:** El consumo de Alimentos no elaborados en España: Análisis de la información de MERCASA.

8803 **Agustín Maravall and Daniel Peña:** Missing Observations in Time Series and the «DUAL» Autocorrelation Function.

8804 **José Viñals:** El Sistema Monetario Europeo. España y la política macroeconómica. (Publicada una versión en inglés con el mismo número.)

8805 **Antoni Espasa:** Métodos cuantitativos y análisis de la coyuntura económica.

8806 **Antoni Espasa:** El perfil de crecimiento de un fenómeno económico.

8807 **Pablo Martín Aceña:** Una estimación de los principales agregados monetarios en España: 1940-1962.

8808 **Rafael Repullo:** Los efectos económicos de los coeficientes bancarios: un análisis teórico.

8901 **Mª de los Llanos Matea Rosa:** Funciones de transferencia simultáneas del índice de precios al consumo de bienes elaborados no energéticos.

8902 **Juan J. Dolado:** Cointegración: una panorámica.

8903 **Agustín Maravall:** La extracción de señales y el análisis de coyuntura.

8904 **E. Morales, A. Espasa y M. L. Rojo:** Métodos cuantitativos para el análisis de la actividad industrial española. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)

9001 **Jesús Albarracín y Concha Artola:** El crecimiento de los salarios y el deslizamiento salarial en el período 1981 a 1988.

9002 **Antoni Espasa, Rosa Gómez-Churruca y Javier Jareño:** Un análisis econométrico de los ingresos por turismo en la economía española.

9003 **Antoni Espasa:** Metodología para realizar el análisis de la coyuntura de un fenómeno económico. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)

9004 **Paloma Gómez Pastor y José Luis Pellicer Miret:** Información y documentación de las Comunidades Europeas.

9005 **Juan J. Dolado, Tim Jenkinson and Simon Sosvilla-Rivero:** Cointegration and unit roots: A survey.

9006 **Samuel Bentolila and Juan J. Dolado:** Mismatch and Internal Migration in Spain, 1962-1986.

9007 **Juan J. Dolado, John W. Galbraith and Anindya Banerjee:** Estimating euler equations with integrated series.

9008 **Antoni Espasa y Daniel Peña:** Los modelos ARIMA, el estado de equilibrio en variables económicas y su estimación. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)

9009 **Juan J. Dolado and José Viñals:** Macroeconomic policy, external targets and constraints: the case of Spain.

9010 **Anindya Banerjee, Juan J. Dolado and John W. Galbraith:** Recursive and sequential tests for unit roots and structural breaks in long annual GNP series.

9011 **Pedro Martínez Méndez:** Nuevos datos sobre la evolución de la peseta entre 1900 y 1936. Información complementaria.

9101 **Javier Valles:** Estimation of a growth model with adjustment costs in presence of unobservable shocks.

9102 **Javier Valles:** Aggregate investment in a growth model with adjustment costs.

9103 **Juan J. Dolado:** Asymptotic distribution theory for econometric estimation with integrated processes: a guide.

9104 **José Luis Escrivá y José Luis Malo de Molina:** La instrumentación de la política monetaria española en el marco de la integración europea. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)

9105 **Isabel Argimón y Jesús Briones:** Un modelo de simulación de la carga de la deuda del Estado.

9106 **Juan Ayuso:** Los efectos de la entrada de la peseta en el SME sobre la volatilidad de las variables financieras españolas. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)

9107 **Juan J. Dolado y José Luis Escrivá:** La demanda de dinero en España: definiciones amplias de liquidez. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)

9108 **Fernando C. Ballabriga:** Instrumentación de la metodología VAR.

9109 **Soledad Núñez:** Los mercados derivados de la deuda pública en España: marco institucional y funcionamiento.

9110 **Isabel Argimón y José Mª Roldán:** Ahorro, inversión y movilidad internacional del capital en los países de la CE. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)

9111 **José Luis Escrivá y Román Santos:** Un estudio del cambio de régimen en la variable instrumental del control monetario en España. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)

9112 **Carlos Chuliá:** El crédito interempresarial. Una manifestación de la desintermediación financiera.

9113 **Ignacio Hernando y Javier Vallés:** Inversión y restricciones financieras: evidencia en las empresas manufactureras españolas.

9114 **Miguel Sebastián:** Un análisis estructural de las exportaciones e importaciones españolas: evaluación del período 1989-91 y perspectivas a medio plazo.

9115 **Pedro Martínez Méndez:** Intereses y resultados en pesetas constantes.

9116 **Ana R. de Lamo y Juan J. Dolado:** Un modelo del mercado de trabajo y la restricción de oferta en la economía española.

9117 **Juan Luis Vega:** Tests de raíces unitarias: aplicación a series de la economía española y al análisis de la velocidad de circulación del dinero (1964-1990).

9118 **Javier Jareño y Juan Carlos Delrieu:** La circulación fiduciaria en España: distorsiones en su evolución.

9119 **Juan Ayuso Huertas:** Intervenciones esterilizadas en el mercado de la peseta: 1978-1991.

9120 **Juan Ayuso, Juan J. Dolado y Simón Sosvilla-Rivero:** Eficiencia en el mercado a plazo de la peseta.

9121 **José M. González-Páramo, José M. Roldán y Miguel Sebastián:** Issues on Fiscal Policy in Spain.

9201 **Pedro Martínez Méndez:** Tipos de interés, impuestos e inflación.

9202 **Víctor García-Vaquero:** Los fondos de inversión en España.

9203 **César Alonso y Samuel Bentolila:** La relación entre la inversión y la «Q de Tobin» en las empresas industriales españolas.

9204 **Cristina Mazón:** Márgenes de beneficio, eficiencia y poder de mercado en las empresas españolas.

9205 **Cristina Mazón:** El margen precio-coste marginal en la encuesta industrial: 1978-1988.

9206 **Fernando Restoy:** Intertemporal substitution, risk aversion and short term interest rates.

9207 **Fernando Restoy:** Optimal portfolio policies under time-dependent returns.

9208 **Fernando Restoy and Georg Michael Rockinger:** Investment incentives in endogenously growing economies.

9209 **José M. González-Páramo, José M. Roldán y Miguel Sebastián:** Cuestiones sobre política fiscal en España.

9210 **Angel Serrat Tubert:** Riesgo, especulación y cobertura en un mercado de futuros dinámico.

---

(1) Los Documentos de Trabajo anteriores a 1988 figuran en el catálogo de publicaciones del Banco de España.

Información: Banco de España
Sección de Publicaciones. Negociado de Distribución y Gestión
Teléfono: 338 51 80
Alcalá, 50. 28014 Madrid